Ｈ２１年度　小論文２　解答例
【問２】

（１）△ACD は正三角形だから $AE \perp CD$ で，$AC = a$，$CE = \dfrac{a}{2}$ である。

直角三角形 ACE において

$$AE^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$AE > 0$　だから　$AE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ （cm）

（２）（１）より $AE = BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

直角三角形 ABH において

$$AH^2 = a^2 - BH^2 \quad \cdots ①$$

また，$HE = BE - BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - BH$

直角三角形 AEH において

$$AH^2 = AE^2 - HE^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - BH\right)^2$$
$$= \sqrt{3}a\,BH - BH^2 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$a^2 - BH^2 = \sqrt{3}a\,BH - BH^2$$
$$\sqrt{3}a\,BH = a^2$$

$a > 0$ より

$$BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

これを①に代入すると

$$AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$AH > 0$　だから　$AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ （cm）

（３）正四面体 ABCD は，△BCD を底面積とすると，高さは AH である。
よって，その体積は

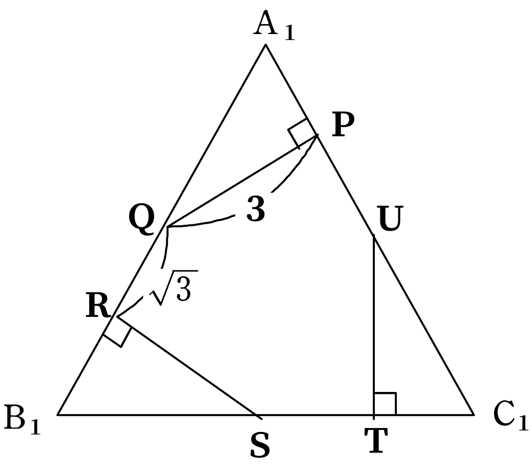
$$\left(\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3}a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \text{ （cm}^3\text{）}$$

（４）六角形 PQRSTU の内角の和は，$180° \times (6-2) = 720°$ であるから

$$3x + 90° \times 3 = 720°$$
$$3x = 450°$$

ゆえに　$x = 150°$

（５）（ｉ）３辺 QR，ST，UP を共有するとき



新しくできる正三角形の頂点を上図のように A_1，B_1，C_1とおく
$\triangle A_1QP$ は，$\angle A_1 = 60°$，$\angle Q = 30°$，$\angle P = 90°$ の直角三角形だから

$QP : A_1Q = \sqrt{3} : 2$

$3 : A_1Q = \sqrt{3} : 2$

$\sqrt{3}\ A_1Q = 6$

$A_1Q = 2\sqrt{3}$

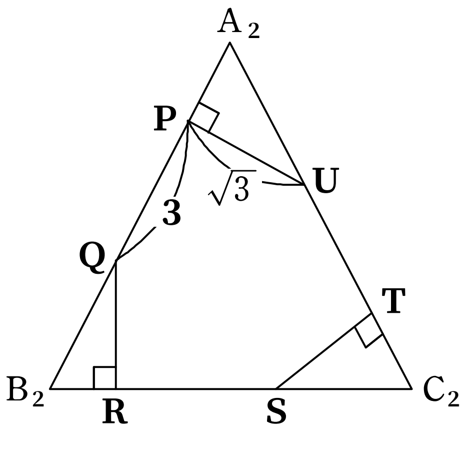
また，$\triangle B_1SR$ において同様に考えると

$RB_1 = \sqrt{3}$

よって，正三角形 $A_1B_1C_1$の１辺の長さは

$A_1Q + QR + RB_1 = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$（cm）

（ii）３辺 PQ，RS，TU を共有するとき



新しくできる正三角形の頂点を上図のように A_2，B_2，C_2とおく
$\triangle A_2PU$ は，$\angle A_2 = 60°$，$\angle P = 90°$，$\angle U = 30°$ の直角三角形だから

$PU : A_2P = \sqrt{3} : 1$

$\sqrt{3} : A_2P = \sqrt{3} : 1$

$\sqrt{3}\ A_2P = \sqrt{3}$

$A_2P = 1$

また，$\triangle B_2RQ$ において同様に考えると

$$B_2Q = 2$$

よって，正三角形 $A_2B_2C_2$ の１辺の長さは

$$A_2P + PQ + QB_2 = 1 + 3 + 2 = 6 \text{（cm）}$$

（ｉ），（ii）より，条件に合う正三角形の１辺の長さは

$$4\sqrt{3}\,\text{cm} \ \text{と}\ 6\,\text{cm}$$

（６）（５）より２つの正三角形の１辺の長さは，$4\sqrt{3}$ cm または ６cm である。

$$4\sqrt{3} = \sqrt{48},\ 6 = \sqrt{36} \quad \text{より} \quad 4\sqrt{3} > 6$$

よって，正四面体の１辺の長さを $4\sqrt{3}$ cm として（３）の結果を用いると，正四面体の体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \times \left(4\sqrt{3}\right)^3 = 16\sqrt{6} \text{（cm}^3\text{）}$$