

▶SSH 課題探究 ◀

1・14

次の問いに答えよ。

(1) x, y を実数とし、 $x > 0$ とする。 t を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 (x, y) 全体からなる座標平面内の領域を S とする。 $x > 0$ かつ、実数 z で $0 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点 (x, y, z) 全体からなる座標空間内の領域を V とする。 $0 \leq x \leq 1$ かつ、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して、

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

が成り立つ。

V の体積を求めよ。

参考 矢代達希君のレポートより

$$(1) \quad f(t) = xt^2 + yt \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$f'(t) = 2xt + y$$

$$= 2x \left(t + \frac{y}{2x} \right) \quad (\because x > 0)$$

ここで、 $f(t)$ の最大値、最小値をそれぞれ M, m とおく。((2), (3) も同様)

以下、(i), (ii), (iii) では、 $x > 0$ に注意する。

$$(i) \quad -\frac{y}{2x} \leq 0$$

即ち、 $y \geq 0$ のとき、

増減表

t	0	...	1
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	↗	$x + y$

$$M - m = (x + y) - 0 = x + y$$

$$(ii) \quad 0 \leq -\frac{y}{2x} \leq 1$$

即ち、 $-2x \leq y \leq 0$ のとき、

増減表

t	0	...	$-\frac{y}{2x}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	↘	$-\frac{y^2}{4x}$	↗	$x + y$

$$(ア) \quad 0 \leq x + y$$

即ち、 $-x \leq y (\leq 0)$ のとき、

$$\begin{cases} M = x + y (\geq 0) \\ m = -\frac{y^2}{4x} \end{cases}$$

$$\therefore M - m = (x + y) - \left(-\frac{y^2}{4x} \right)$$

$$= x + y + \frac{y^2}{4x}$$

$$(イ) \quad x + y \leq 0$$

即ち、 $(-2x \leq)y \leq -x$ のとき、

$$\begin{cases} M = 0 \\ m = -\frac{y^2}{4x} \end{cases}$$

$$\therefore M - m = 0 - \left(-\frac{y^2}{4x} \right) = \frac{y^2}{4x}$$

$$(iii) \quad 1 \leq -\frac{y}{2x}$$

即ち、 $y \leq -2x$ のとき、

増減表

t	0	...	1
$f'(t)$		-	
$f(t)$	0	↘	$x + y$

$$\therefore M - m = 0 - (x + y) = -(x + y)$$

ゆえに、(i)~(iii) より、 $0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値と最小値の差 $M - m$ は、

$$M - m = \begin{cases} -(x + y) & (y \leq -2x \text{ のとき}) \\ \frac{y^2}{4x} & (-2x \leq y \leq -x \text{ のとき}) \\ x + y + \frac{y^2}{4x} & (-x \leq y \leq 0 \text{ のとき}) \\ x + y & (0 \leq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(2) \quad 0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ここで、 $f(t) = xt^2 + yt$ より、

$$0 \leq f(t) + z \leq 1$$

$$-z \leq f(t) \leq 1 - z$$

これが、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲のすべての実数 t で成り立つための必要十分条件は、

$$\begin{cases} -z \leq m \\ M \leq 1 - z \end{cases}$$

が成り立つことである。

これより、

$$z \geq -m, \quad z \leq 1 - M$$

であるから、

$$-m \leq z \leq 1 - M$$

を満たす実数 z が存在すればよい。

すなわち、

$$-m \leq 1 - M$$

$$\therefore M - m \leq 1$$

以下、(1) の場合分けで考える。

(i) $0 \leq y$ のとき,

$$M - m = x + y \leq 1$$

$$\therefore y \leq -x + 1$$

(ii) (ア) $-x \leq y \leq 0$ のとき,

$$M - m = x + y + \frac{y^2}{4x} \leq 1$$

$x > 0$ より,

$$4x^2 + 4xy + y^2 \leq 4x$$

$$y^2 + 4xy + 4x^2 - 4x \leq 0$$

$$\{y - (-2x - 2\sqrt{x})\} \{y - (-2x + 2\sqrt{x})\} \leq 0$$

$$\therefore -2x - 2\sqrt{x} \leq y \leq -2x + 2\sqrt{x}$$

(イ) $-2x \leq y \leq -x$ のとき,

$$M - m = \frac{y^2}{4x} \leq 1$$

$x > 0$ より,

$$y^2 \leq 4x$$

$$\frac{1}{4} \leq x$$

(iii) $y \leq -2x$ のとき,

$$M - m = -(x + y) \leq 1$$

$$\therefore y \geq -x - 1$$

以上より,

$$\begin{cases} 0 \leq y, & y \leq -x + 1 \\ -x \leq y \leq 0, & -2x - 2\sqrt{x} \leq y \leq -2x + 2\sqrt{x} \\ -2x \leq y \leq -x, & y^2 \leq 4x \\ y \leq -2x, & y \geq -x - 1 \end{cases}$$

次に, $y = -2x + 2\sqrt{x}$ のグラフの概形を調べる。

$$\begin{aligned} y' &= -2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 1) \end{aligned}$$

増減表

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
y'		+		-
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘

また,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x + 2\sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right\} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

また, 同様に, $y = -2x - 2\sqrt{x}$ のグラフの概形も調べる。

$$\begin{aligned} y' &= -2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y'' &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

増減表

x	0	...
y'		-
y''		+
y	0	↘

また,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x - 2\sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -2x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

次に, $y = -x + 1$ と $y = -2x + 2\sqrt{x}$ の大小を調べる。

$$g(x) = (-2x + 2\sqrt{x}) - (-x + 1) \text{ とおく。}$$

$$g(x) = -x + 2\sqrt{x} - 1$$

より,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) \end{aligned}$$

増減表

x	0	...	1	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗	0	↘

$x > 0$ のとき, $g(x) \leq 0$

よって, $-2x + 2\sqrt{x} \leq -x + 1 \quad (x > 0)$

等号成立は, $x = 1$ のとき。

また, $y = -2x + 2\sqrt{x}$ と $y = -x$ の共有点を求める。

$$-2x + 2\sqrt{x} = -x$$

$$\therefore x = 2\sqrt{x}$$

$$\therefore x^2 = 4x$$

$$\therefore x(x - 4) = 0$$

$$x = 0, 4$$

いずれも, $x = 2\sqrt{x}$ を満たす。

よって, 交点の座標は,

$$(0, 0), (4, -4)$$

である。

次に, $y = -x - 1$ と $x = \frac{1}{4}y^2$ の共有点を求める。

$$x = \frac{1}{4}(-x - 1)^2$$

$$x = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x - 1)^2 = 0$$

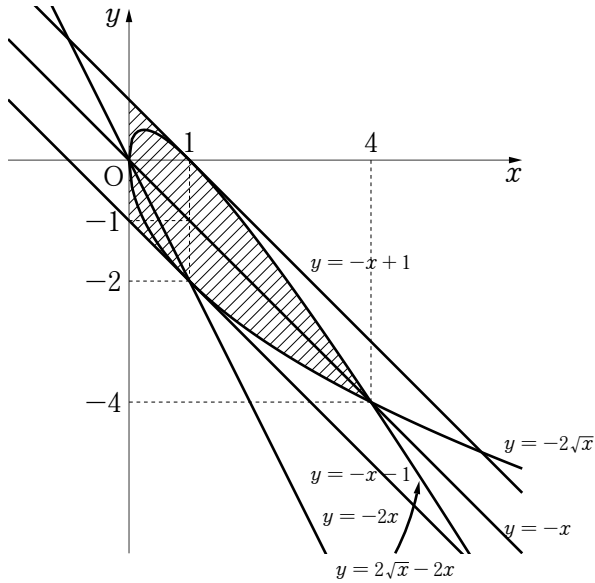
$$\therefore x = 1$$

よって, 接点の座標は,

$$(1, -2)$$

である。

ゆえに、(i)~(iii)の条件を満たす領域 S は下図の斜線部分。ただし、境界はすべて含む。



(3) 条件より、 $0 \leq x \leq 1$ である。

$$f(t) = xt^2 + yt \text{ より,}$$

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

$$0 \leq f(t) + z \leq 1$$

$$-f(t) \leq z \leq 1 - f(t)$$

この不等式が、 $0 \leq t \leq 1$ を満たすすべての実数 t で成り立つから、

$$-m \leq z \leq 1 - M$$

である。

以下、(1)の場合分けで考える。

(i) $0 \leq y$ のとき、

$$-0 \leq z \leq 1 - (x + y)$$

よって、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき,}$$

$$0 \leq z \leq 1 - (x + y)$$

(ii) (ア) $-x \leq y \leq 0$ のとき、

$$-\left(-\frac{y^2}{4x}\right) \leq z \leq 1 - (x + y)$$

$$\frac{y^2}{4x} \leq z \leq 1 - (x + y)$$

(イ) $-2x \leq y \leq -x$ のとき、

$$-\left(-\frac{y^2}{4x}\right) \leq z \leq 1 - 0$$

$$\frac{y^2}{4x} \leq z \leq 1$$

(iii) $y \leq -2x$ のとき、

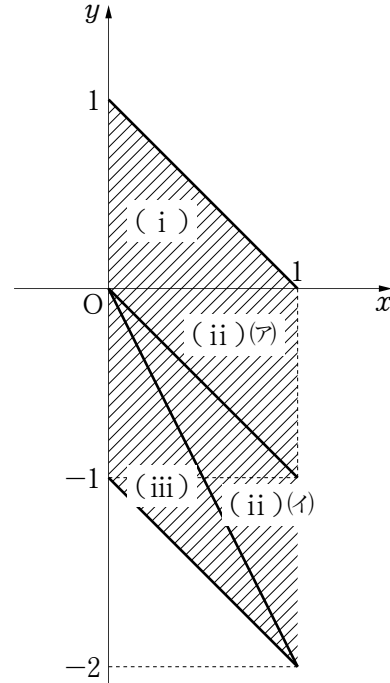
$$-(x + y) \leq z \leq 1 - 0$$

$$-(x + y) \leq z \leq 1$$

ここで、(2) から、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、

$$-x - 1 \leq y \leq -x + 1$$

だから、これらの領域をまとめると次のようになる。



立体 V を平面 $x = k$ で切ったときの断面図を考える。

ただし、 $0 \leq k \leq 1$

従って、とり得る y の値の範囲は、

$$-k - 1 \leq y \leq 1 - k$$

(i) $0 \leq y (\leq 1 - k)$ のとき、

$$0 \leq z \leq 1 - (k + y)$$

$$0 \leq z \leq (1 - k) - y$$

(ii) (ア) $-k \leq y \leq 0$ のとき、

$$\frac{y^2}{4k} \leq z \leq 1 - (k + y)$$

$$\frac{1}{4k} y^2 \leq z \leq (1 - k) - y$$

(イ) $-2k \leq y \leq -k$ のとき、

$$\frac{y^2}{4k} \leq z \leq 1$$

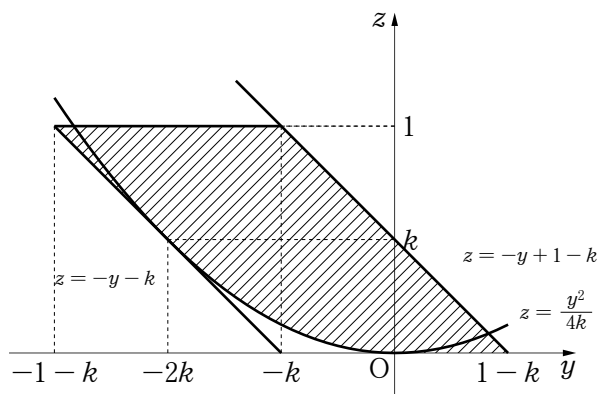
$$\frac{1}{4k} y^2 \leq z \leq 1$$

(iii) $(-k - 1) \leq y \leq -2k$ のとき、

$$-(k + y) \leq z \leq 1$$

$$-y - k \leq z \leq 1$$

以上を満たす範囲を、 $y - z$ 平面で図示すると、



$-z \leq m$ かつ $M \leq 1 - z$ となる条件を導く考え方は難しいところ。(3) も似ているが、さらに、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で x が動くところが難しい。そこで、立体 V を平面 $x = k$ で切った切断面を考えているところは自然の流れ。(1) の場合分けをそのまま(2), (3) でも使っているところが書き方としてやや回りくどい感じがするが、ゴールまでの長い道のりを一歩一歩進めている。数学力が充分に発揮されているレポートであると思う。

よって、立体 V の平面 $x = k$ による切断面の面積 S_k は、

$$\begin{aligned}
 S_k &= \int_{-1-k}^{-2k} \{1 - (-y - k)\} dy + \int_{-2k}^{-k} \left\{1 - \left(\frac{y^2}{4k}\right)\right\} dy \\
 &\quad + \int_{-k}^0 \left\{(-y + 1 - k) - \left(\frac{y^2}{4k}\right)\right\} dy \\
 &\quad + \int_0^{1-k} (-y + 1 - k) dy \\
 &= \frac{1}{2} \{-2k - (-1 - k)\}(1 - k) \\
 &\quad + \int_{-2k}^{-k} dy + \int_{-k}^0 (-y + 1 - k) dy \\
 &\quad + \int_{-2k}^0 \left(-\frac{y^2}{4k}\right) dy + \frac{1}{2}(1 - k)^2 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - k)^2 + k + \left[-\frac{y^2}{2} + (1 - k)y\right]_{-k}^0 \\
 &\quad + \left[\frac{y^3}{12k}\right]_{-2k}^0 + \frac{1}{2}(1 - k)^2 \\
 &= (1 - k)^2 + k \\
 &\quad + \left\{-\left(-\frac{k^2}{2} - (1 - k)k\right)\right\} + \left(-\frac{-8k^3}{12k}\right) \\
 &= (1 - k)^2 + k + \frac{k^2}{2} + k - k^2 - \frac{2}{3}k^2 \\
 &= 1 - \frac{k^2}{6}
 \end{aligned}$$

よって、求める体積 V は、

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 S_k dk \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{k^2}{6}\right) dk \\
 &= \left[k - \frac{k^3}{18}\right]_0^1 \\
 &= 1 - \frac{1}{18} \\
 &= \frac{17}{18}
 \end{aligned}$$

解説 (2) $0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1 \iff 0 \leq f(t) + z \leq 1$ が、
 $0 \leq t \leq 1$ を満たすすべての実数 t に対して成り立つことから、