

▶SSH 課題探究 ◀

10・18

平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり、 C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き、ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t = 0$ において、 P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる。 $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。

【参考】 長田景也君のレポートより

$\triangle APQ$ の面積に関して、点 $A(1, 0)$ として一般性を失わない。

$$1 \times \angle AOP = t$$

$$\therefore \angle AOP = t$$

$$2 \times \angle AOQ = t$$

$$\therefore \angle AOQ = \frac{t}{2}$$

このとき、

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{t}{2} \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

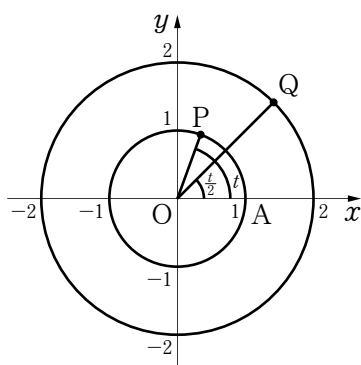
$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 2 \\ 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{t}{2} - 1 \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AP}|^2 &= (-1 + \cos t)^2 + \sin^2 t \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \cos t + 1 \\ &= 2 - 2 \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AQ}|^2 &= 4 \cos^2 \frac{t}{2} + 4 \sin^2 \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} + 1 \\ &= -4 \cos \frac{t}{2} + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{AQ} &= \left(2 \cos^2 \frac{t}{2} - 2 \right) \left(2 \cos \frac{t}{2} - 1 \right) \\ &\quad + \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) \\ &= 4 \cos^3 \frac{t}{2} - 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \\ &\quad + 2 + 4 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \\ &= 4 \cos^3 \frac{t}{2} - 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \\ &\quad + 2 + 4 \cos \frac{t}{2} - 4 \cos^3 \frac{t}{2} \\ &= -2 \cos^2 \frac{t}{2} + 2 \end{aligned}$$



ここで、 $\cos \frac{t}{2} = x$ とおくと、 $(-1 \leq x \leq 1)$

$$|\vec{AP}|^2 = 4 - 4x^2, \quad |\vec{AQ}|^2 = -4x + 5$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = -2x^2 + 2$$

$\triangle APQ$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} \{ |\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (4 - 4x^2)(-4x + 5) - (-2x^2 + 2)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (16x^3 - 20x^2 - 16x + 20 - 4x^4 + 8x^2 - 4) \\ &= \frac{1}{4} (-4x^4 + 16x^3 - 12x^2 - 16x + 16) \\ &= -x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS^2}{dx} &= -4x^3 + 12x^2 - 6x - 4 \\ &= -2(2x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \\ &= -2(x - 2)(2x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS^2}{dx} &= 0 \text{ とすると,} \\ (x - 2)(2x^2 - 2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2, \quad \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$-1 \leq x \leq 1$ の範囲で増減表をかくと、

x	-1	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	1
$\frac{dS^2}{dx}$		+	0	-	
S^2		↗	極大	↘	

よって、 S^2 は、 $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき最大となり、

$$\begin{aligned} S^2 &= -\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^4 + 4 \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &\quad - 4 \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \\ &= -\frac{(4-2\sqrt{3})^2}{16} + \frac{4(1-\sqrt{3})^3}{8} - \frac{3(1-\sqrt{3})^2}{4} \\ &\quad - 4 \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \\ &= -\frac{16-16\sqrt{3}+12}{16} + \frac{4(1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3})}{8} \\ &\quad - \frac{3(4-2\sqrt{3})}{4} - 4 \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 4 \\ &= \frac{4\sqrt{3}-7}{4} - \frac{12\sqrt{3}+20}{4} + \frac{6\sqrt{3}-12}{4} - 2+2\sqrt{3}+4 \\ &= \frac{-2\sqrt{3}+1}{4} + \frac{8+8\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}+9}{4} \end{aligned}$$

【解説】 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2}$ は、この形で使うことが結構多い。

$\vec{AP} = (\cos t - 1, \sin t)$, $\vec{AQ} = (2 \cos \frac{t}{2} - 1, 2 \sin \frac{t}{2})$ から、 $\triangle APQ = \frac{1}{2} |(\cos t - 1) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} - \sin t (2 \cos \frac{t}{2} - 1)|$ と求めるのでもよい。最後の S^2 の計算も直接的で悪くない。 $S^2 = (1 - x^2)(x - 2)^2$ と式変形できることも参考にする。