

▶SSH 課題探究 ◀

6・11

次の問いに答えよ。

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とするとき, $\sin x$ と $\cos x$ を t で表せ。

(2) 関数 $f(x) = \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x}$ の最大値と最小値を求めよ。

【参考】 矢島旦景君のレポートより

$$\begin{aligned} (1) \quad \tan^2 \frac{x}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = t^2 \\ \therefore 1 - \cos x &= t^2(1 + \cos x) \\ \therefore (1 + t^2)\cos x &= 1 - t^2 \\ \therefore \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \text{また, } \tan x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2} \text{ より,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - t^2)\sin x &= 2t \cos x \\ \therefore \sin x &= \frac{2t}{1 - t^2} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x} \text{ に,} \\ \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2}, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \text{を代入したのものを, } g(t) &\text{ とおく。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1 - \frac{2t}{1 + t^2}}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \\ &= \frac{1 + t^2 - 2t}{2(1 + t^2) + 1 - t^2} \\ &= \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 3} \\ &= \frac{(t - 1)^2}{t^2 + 3} \end{aligned}$$

また, $-1 \leq \sin x \leq 1$ より,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2t}{1 + t^2} \leq 1 \\ \therefore -1 - t^2 &\leq 2t \leq 1 + t^2 \\ \therefore \begin{cases} t^2 + 2t + 1 \geq 0 \\ t^2 - 2t + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} (t + 1)^2 \geq 0 \\ (t - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

この連立不等式の解は, t がすべての実数値をとる。

そこで, すべての実数 t に対して, $g(t)$ のグラフの様子を調べ, $f(x)(=g(t))$ の最大値を最小値を求める。

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{2(t - 1)(t^2 + 3) - (t - 1)^2 \cdot 2t}{(t^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(2t^3 - 2t^2 + 6t - 6) - (2t^3 - 4t^2 + 2t)}{(t^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2t^2 + 4t - 6}{(t^2 + 3)^2} \\ &= \frac{2(t + 3)(t - 1)}{(t^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

$g'(t) = 0$ とすると,

$$t = -3, 1$$

これより, $g(t)$ の増減表は,

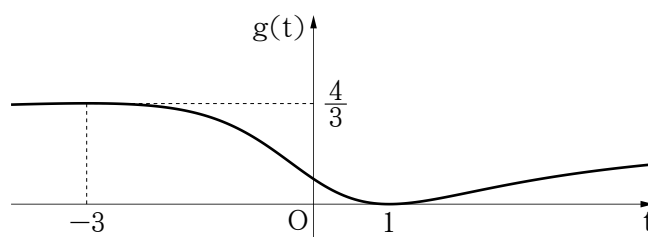
t	...	-3	...	1	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

遠方での様子は,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{(t - 1)^2}{t^2 + 3} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 3} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{3}{t^2}} \text{ より,} \end{aligned}$$

$$t \rightarrow \pm\infty \text{ のとき, } g(t) \rightarrow 1$$

これより, $g(t)$ のグラフは,



グラフより, $f(x)(=g(t))$ の

最大値は, $\frac{4}{3}$ ($t = \tan \frac{x}{2} = -3$ のとき)

最小値は, 0 ($t = \tan \frac{x}{2} = 1$ のとき)

【解説】 $t = \tan \frac{x}{2}$ より, t はすべての実数値をとることは明らかであるが, $-1 \leq \frac{2t}{1 + t^2} \leq 1$ から t のとり得る値の範囲を求めるのも, x と t の関係から自然に思える。数Ⅲの範囲では, $g(t) = \frac{(t - 1)^2}{t^2 + 3}$ についての $y = g(t)$ のグラフをかくことは簡単である。 $t \rightarrow \pm\infty$ のときの状態を調べることも忘れていない。最大値, 最小値をとるとき x の存在については $t = \tan \frac{x}{2}$ のグラフを考えれば明らかである。因みに, 最小値をとるとき x は, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ と具体的に得られる。

【参考】 大輪七音君のレポートより

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

(2) $\tan \frac{x}{2} = t$ とおく。

このとき, t はすべての実数である。

$y = f(x)$ とおくと,

$$y = \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\therefore y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 3}$$

$$\therefore (y-1)t^2 + 2t + (3y-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $y = 1$ のとき, ① より,

$$t = -1$$

t はすべての実数値をとるから, $t = -1$ となる x は存在する。

(ii) $y \neq 1$ のとき, ① が実数解をもつ条件は,

$$\frac{D}{4} = 1 - (y-1)(3y-1) \geq 0$$

$$\therefore y(3y-4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq y \leq \frac{4}{3} \quad (\text{ただし, } y \neq 1)$$

以上, (i), (ii) より,

$$0 \leq y \leq \frac{4}{3}$$

よって, $f(x)$ の最大値は $\frac{4}{3}$, 最小値は 0 である。

解説 $t = \tan \frac{x}{2}$ なので, $x = \pi \pm n\pi$ (n は整数) のときの扱いは注意したほうがよい。この場合, $f(\pi \pm n\pi) = 1$ である。1 次方程式が実数解をもつことは, 実際の実数解を求めて確認する。2 次方程式が実数解をもつことは, 判別式 $D \geq 0$ である。と方法が異なることも忘れていない。

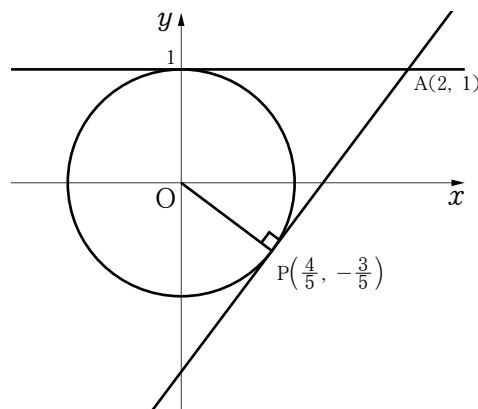
参考 五味陸君のレポートより

$P(-\cos x, \sin x)$ とおく。

$$(-\cos x, \sin x) = (\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$$

と変形すると, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で, 円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を, 点 $(-1, 0)$ から出発して, 時計回りに 1 周するから, すべての実数 x に関して, 点 P は原点を中心とする単位円周上のすべてを描く。

点 $A(2, 1)$ とすると, $f(x) = \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x}$ は, 直線 AP の傾きを表している。



グラフより, 直線 AP が, 円に接するときに傾きが最大または最小となる。

接するときの点 P の座標を $(s, t) = (-\cos x, \sin x)$ とおくと,

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$ だから,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\therefore (s, t) \cdot (s-2, t-1) = 0$$

$$\therefore s^2 - 2s + t^2 - t = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 $P(s, t)$ は, 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点だから,

$$s^2 + t^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ である。}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{ より, } -2s - t + 1 = 0$$

$$\therefore 2s + t = 1$$

$t = 1 - 2s$ を ② に代入して,

$$s^2 + (1 - 2s)^2 = 1 \quad \therefore s(5s - 4) = 0$$

$$\therefore s = 0, \frac{4}{5}$$

$$\therefore (s, t) = (0, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

これより, $f(x)$ の最大値は, AP の傾きが最大となるときで,

$$\frac{1 + \frac{3}{5}}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{3}$$

$f(x)$ の最小値は, AP の傾きが最小となるときで,

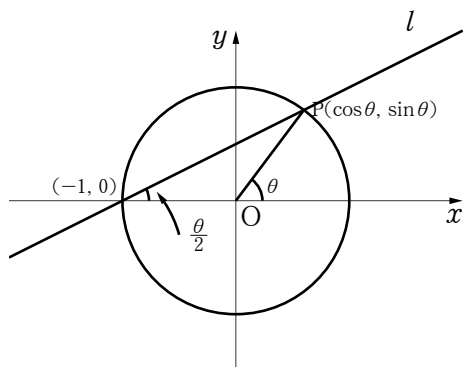
$$\frac{1 - 1}{2 - 0} = 0$$

である。

解説 原点を中心とする半径 1 の円周上を動く点 $P(-\cos x, \sin x)$ と定点 $A(2, 1)$ を結ぶ直線 AP の傾きに注目した。図より, $0 \leq \text{傾き} \leq \frac{4}{3}$ であることもわかる。点 P が円周上のすべての点をとることをきちんと述べている。

【参考】 小池樹君のレポートより

(1) $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおく。



t は上図の直線 l の傾きだから、

$$l: y = t(x + 1)$$

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

連立させて、

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

$$\therefore (1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (x + 1)\{(1 + t^2)x + (t^2 - 1)\} = 0$$

$$\therefore x = -1, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

ここで、 $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ のとき、

$$y = t\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\therefore (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$

(2) $t = \tan \frac{x}{2}$ より、 t はすべての実数値をとる。

$$f(x) = g(t) = \frac{1 - \frac{2t}{1 + t^2}}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

$$= \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 3}$$

$$= 1 - \frac{2(t + 1)}{t^2 + 3}$$

$$= 1 - \frac{2}{t - 1 + \frac{4}{t + 1}} \quad (t \neq -1)$$

$$= 1 - \frac{2}{(t + 1) + \frac{4}{t + 1} - 2} \dots\dots ①$$

(i) $t = -1$ のとき、

$$g(-1) = 1$$

(ii) $t > -1$ のとき、

$t + 1 > 0$ だから、相加・相乗平均の不等式より、

$$t + 1 + \frac{4}{t + 1} \geq 2\sqrt{(t + 1) \cdot \frac{4}{t + 1}} = 4$$

ここで、等号成立条件は、

$$t + 1 = \frac{4}{t + 1} \text{ のとき、すなわち、}$$

$$(t + 1)^2 = 4$$

$$t + 1 > 0 \text{ より、} t + 1 = 2$$

よって、 $t = 1$ のときである。

従って、① より、

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 - \frac{2}{(t + 1) + \frac{4}{t + 1} - 2} \\ &\geq 1 - \frac{2}{4 - 2} = 0 \end{aligned}$$

(ii) $t < -1$ のとき、

$$t + 1 < 0 \text{ だから、} -(t + 1) > 0$$

相加・相乗平均の不等式より、

$$-(t + 1) + \frac{4}{-(t + 1)} \geq 2\sqrt{-(t + 1) \cdot \frac{4}{-(t + 1)}} = 4$$

$$\therefore t + 1 + \frac{4}{t + 1} \leq -4$$

ここで、等号成立条件は、

$$-(t + 1) = \frac{4}{-(t + 1)} \text{ のとき、すなわち、}$$

$$(t + 1)^2 = 4$$

$$t + 1 < 0 \text{ より、} t + 1 = -2$$

よって、 $t = -3$ のときである。

従って、① より、

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 - \frac{2}{(t + 1) + \frac{4}{t + 1} - 2} \\ &\leq 1 - \frac{2}{-4 - 2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

以上 (i), (ii), (iii) より、

$$\text{最大値は、} \frac{4}{3} \quad (t = \tan \frac{x}{2} = -3 \text{ のとき})$$

$$\text{最小値は、} 0 \quad (t = \tan \frac{x}{2} = 1 \text{ のとき})$$

【解説】 相加平均・相乗平均の不等式がうまく使えた。 $(t + 1)$ の固まりに注目した点と、 $t \geq -1$ のときと、 $t \leq -1$ のときで使い方を区別している点がポイントである。最後の 2 つの不等式の評価はプラス、マイナスが絡み、分母の大小を扱うから不等号の向きに関して丁寧に扱いたい。