▶SSH 課題探究◀

5•16

次の問いに答えよ。

（１）　自然数 x，y は，

$1 < x < y$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす。

x，y の組をすべて求めよ。

（２）　自然数 x，y，z は，

$1 < x < y < z$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす。x，y，z の組をすべて求めよ。

参考　Y.Y. さんのレポートより

（１）　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ より，

$3(x+1)(y+1)=5xy$

$\therefore\quad 5xy-3(xy+x+y+1)=0$

$\therefore\quad 2xy-3x-3y-3=0$

$\therefore\quad 4xy-6x-6y-6=0$

$\therefore\quad (2x-3)(2y-3)=15\cdots①$

$1<x<y$ より，

$-1<2x-3<2y-3$ だから，① をみたすのは，

$(2x-3,\ 2y-3)=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

$\therefore\quad (x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

（２）　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ より，

$5(x+1)(y+1)(z+1)=12xyz\cdots②$

$1<x$ より，

（ｉ）$x=2$ のとき，② より，

$5\cdot3(y+1)(z+1)=12\cdot2yz$

$\therefore\quad 5(y+1)(z+1)=8yz$

$\therefore\quad 8yz-5(yz+y+z+1)=0$

$\therefore\quad 3yz-5y-5z-5=0$

$\therefore\quad 9yz-15y-15z-15=0$

$\therefore\quad (3y-5)(3z-5)=40\cdots③$

$2<y<z$ より，$1<3y-5<3z-5$ だから，③ より，

$(3y-5,\ 3z-5)=(2,\ 20),\ (4,\ 10)$

$(y,\ z)=\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{25}{3}\right),\ (3,\ 5)$

y，z は自然数なので適するのは，

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

（ii）$x=3$ のとき，② より，

$5\cdot5\cdot4(y+1)(z+1)=12\cdot3yz$

$\therefore\quad 5(y+1)(z+1)=9yz$

$\therefore\quad 9yz-5(yz+y+z+1)=0$

$\therefore\quad 4yz-5y-5z-5=0$

$\therefore\quad \left(2y-\dfrac{5}{2}\right)\left(2y-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{35}{4}$

$\therefore\quad (4y-5)(4z-5)=35\cdots④$

$3<y<z$ より，$7<3y-5<3z-5$ だから，適する自然数 y，z は存在しない。

また，$x\geqq3$ のときは，$x<y<z$ より，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$ だから，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$

$\therefore\quad \dfrac{12}{5}<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$

一方，$x\geqq3$ より，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3\leqq\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}$

$\dfrac{64}{27}=\dfrac{320}{135}<\dfrac{324}{135}=\dfrac{12}{5}$ より，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3\leqq\dfrac{12}{5}$ となるため，解は存在しない。

以上より，

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解説　整数問題で有名な因数分解もどきの，$(2x-3)(2y-3)=15$ というような式変形を作りながら進めている。大小関係をきちんと抑えていて無駄がない。流れるような解法である。

参考　O.Y. 君のレポートより

（１）　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}\cdots①$

$1<x<y$ より，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$ だから，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqq\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\quad 3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqq5$

関数 $3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ は減少関数にだから，適する自然数 x は，

$x=1,\ 2,\ 3$ のみである。

$x=1$ のとき，① より，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{6}$

$\therefore\quad y+1=\dfrac{5}{6}y$

$\therefore\quad y=-6$　自然数でないから不適。

$x=2$ のとき，① より，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{10}{9}$

$\therefore\quad y=9$　条件を満たす。

$x=2$ のとき，① より，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\quad y=4$　条件を満たす。

以上より，

$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

（2）$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}\cdots$②

$1<x<y<z$ より，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \geqq \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

$$\therefore\quad 5\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \geqq 12$$

関数 $5\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ は減少関数だから，適する自然数 x は，

$x=1,\ 2$ のみである。

$x=1$ のとき，② より，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{6}{5}$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \geqq \frac{6}{5}$$

$$\therefore\quad 5\left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \geqq 6$$

これを満たす自然数は，$y=1,\ 2,\ 3$ のみである。

$y=1$ のとき，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{5}$

$5z+5=3z \quad \therefore\quad z=-\dfrac{5}{2}$　不適。

$y=2$ のとき，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{5}$

$5z+5=4z \quad \therefore\quad z=-5$　不適。

$y=3$ のとき，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{9}{10}$

$10z+1=9z \quad \therefore\quad z=-1$　不適。

$y=4$ のとき，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{24}{25}$

$25z+1=24z \quad \therefore\quad z=-1$　不適。

$y=5$ のとき，$1+\dfrac{1}{z}=1$

これを満たす自然数 z は存在しない。

$x=2$ のとき，② より，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{8}{5}$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \geqq \frac{8}{5}$$

$$\therefore\quad 5\left(1+\frac{1}{8}\right)^2 \geqq 8$$

これを満たす自然数は，$y=1,\ 2,\ 3$ のみである。

さらに，$1<x<y$ より，$y=3$

このとき，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5}$

$\therefore\quad 5z+5=6z \quad \therefore\quad z=5$

以上より，

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解説　関数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ などが，x についての減少関数であることに注目して，$x=1,\ 2,\ 3$ と順に代入して不等式を満たす自然数を狭めていく。少し大雑把に範囲を絞っている分，はじかれる解もそこそこあるが，整数問題とはそういうものなのであろう。

参考　N.K. 君のレポートより

（1）$1<x<y$ のとき，

$1<x<y<xy$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{xy}\cdots$①

また，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{3}\cdots$②

① を用いると，

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{2}{3}$

$\therefore\quad \dfrac{3}{x}>\dfrac{2}{3}$

$\therefore\quad (1<)x<\dfrac{9}{2}$

x は自然数だから，

$x=2,\ 3,\ 4$

② について，

（i）$x=2$ のとき，

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{3}{2y}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\quad y=9$　適する。

（ii）$x=3$ のとき，

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{4}{3y}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad y=4$　適する。

（iii）$x=4$ のとき，

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{4y}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{5}{4y}=\dfrac{5}{12}$

$\therefore\quad y=3$　$x<y$ に不適。

以上より，

$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

（2）$1<x<y<z$ のとき，

$x<xy,\ x<yz,\ x<zx,\ x<xyz$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{z},\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{xy},\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{yz},$
$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{zx},\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{xyz}\cdots$③

また，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ より，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}=\frac{7}{5}\cdots④$$

③ を用いると，

$\dfrac{7}{x}>\dfrac{7}{5}$

$\therefore \quad (1<)x<5$

x は自然数だから，

$x=2,\ 3,\ 4$

④ について，

（ i ） $x=2$ のとき，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2yz}=\frac{7}{5}$$

$\therefore \quad 9yz-15y-15z=15$

$\therefore \quad (3y-5)(3z-5)=40$

$2=x<y$ より，y は 3 以上の自然数だから，

$(3y-5,\ 3z-5)=(4,\ 10),\ (5,\ 8)$

$(x,\ y)=(3,\ 5)$。$\left(\frac{10}{3},\ \frac{13}{3}\right)$

適するのは，$(x,\ y)=(3,\ 5)$

（ii） $x=3$ のとき，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3yz}=\frac{7}{5}$$

$\therefore \quad 16yz-20y-20z=20$

$\therefore \quad (4y-5)(4z-5)=45 \cdots$ ⑤

$3=x<y$ より，y は 4 以上の自然数だから，

$4y-5 \geqq 11$

よって，⑤ を満たす自然数 y，z は存在しない。

（iii） $x=4$ のとき，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{4yz}=\frac{7}{5}$$

③ と同様に，

$\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$，$\frac{1}{y}>\frac{1}{yz}$ だから，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3y}>\frac{7}{5}$$

$\therefore \quad \frac{1}{4}+\frac{4}{y}>\frac{7}{5}$

$\therefore \quad \frac{4}{y}>\frac{23}{20}$

$\therefore \quad y<\frac{80}{23} \cdots$ ⑥

$4=x<y$ より，y は 5 以上の自然数であるが，⑥ を満たす y は存在しない。

以上より，

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解説　文字が 3 つの場合も，式を展開して，$\frac{1}{xy}$，$\frac{1}{yz}$，$\frac{1}{zx}$，$\frac{1}{xyz}$ に対しても，すべて上から $\frac{1}{x}$ で評価している。色々な評価の仕方があるものだ。

参考　N.S. さんのレポートより

（1） $1<x<y$ より，$0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1$ だから，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore \quad \frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{5}{3}}<1+\frac{1}{x}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{1}{x}$

$\therefore \quad x<\frac{3+\sqrt{15}}{2}$

よって，$1<x<\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ となり，これを満たす自然数 x は，

$x=2,\ 3$

（ i ）$x=2$ のとき，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$\therefore \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{9} \quad \therefore \quad y=9$

（ii） $x=3$ のとき，

$$\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$\therefore \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{4} \quad \therefore \quad y=4$

いずれも条件を満たすから，以上より，

$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

（2） $1<x<y<z$ より，$\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1$ だから，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$$

$\therefore \quad \frac{12}{5}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \cdots$ ①

ここで，$3 \leqq x$ をとると，

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \leqq \left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$ となり，① に不適である。

よって，候補となる自然数 x は，$x=2$ のみである。

したがって，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{12}{5}$$

$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{8}{5}$

$\frac{1}{z}<\frac{1}{y}$ より，

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)<\left(1+\frac{1}{y}\right)^2$$

$\therefore \quad \frac{8}{5}<\left(1+\frac{1}{y}\right)^2$

$\therefore \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<1+\frac{1}{y}$

$\therefore \quad y<\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

$\therefore \quad y<\frac{2\sqrt{10}+5}{3}$

よって，$2=x<y<\frac{2\sqrt{10}+5}{3}$ となり，適する自然数 y の値は，$y=3$ のみである。

$y=3$ のとき，$\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{8}{5}$ だから，

$$1+\frac{1}{z}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{5}\quad\therefore\quad z=5$$

以上より，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$$

解説　2次不等式の範囲で実際に不等式を解いて文字の範囲を狭めている。

参考　O.T. さんのレポートより

（1） $1<x<y$ を満たす自然数 x，y に対して，条件より，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{5}\cdots①$$

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>0$ から，

$\dfrac{5}{2}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ となり，

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}<1+\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}>\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad x<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+3}{2}<\frac{7}{2}$$

よって，条件を満たす自然数 x は，

$$x=2,\ 3$$

（i） $x=2$ のとき，① より，

$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{9}$ となり，

$$y=9$$

（ii） $x=3$ のとき，① より，

$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}$ となり，

$$y=4$$

以上より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$$

（2） $1<x<y<z$ を満たす自然数 x，y，z に対して，条件より，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}\cdots②$$

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$ から，

$\dfrac{12}{5}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{5}}<1+\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}>\frac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\therefore\quad x<\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12\cdot5}+\sqrt[3]{5^2})}{12-5}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{720}+\sqrt[3]{300}+5}{7}$$

ここで，$\sqrt[3]{720}<9$，$\sqrt[3]{300}<7$ から，

$x<\dfrac{9+7+5}{7}=3$ となり，適する自然数 x は，$x=2$ である。

よって，② より，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{8}{5}\cdots③$$

同様にして，$\dfrac{8}{5}<\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^2$ から，

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}<1+\frac{1}{y}$$

$\therefore\quad \dfrac{1}{y}>\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ となり，

$$y<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{40}+5}{3}<\frac{7+5}{3}=4$$

よって，$y=3$ のみが適する。

③ より，$1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5}$，すなわち，$z=5$ である。

以上より，求める自然数の組は，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$$

解説　3次不等式の範囲で実際に不等式を解いて文字の範囲を狭めている。$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12\cdot5}+\sqrt[3]{5^2})}{12-5}$ の有理化の方法は参考になる。その直後の評価，$\sqrt[3]{720}<9$，$\sqrt[3]{300}<7$ も見習いたい。

参考　E.D. 君のレポートより

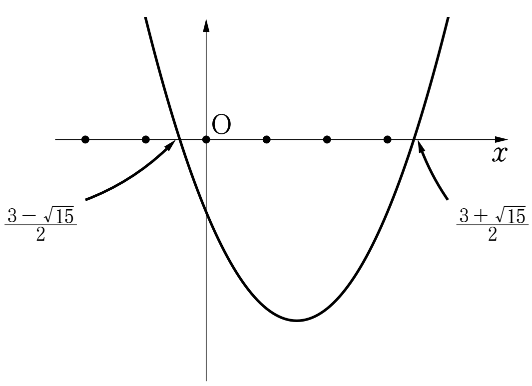
（1） $1<x<y$ より，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{5}{3}<1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\quad 2x^2-6x-3<0$$

$$\therefore\quad \frac{3-\sqrt{15}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{15}}{2}$$



x は，$1<x$ をみたす自然数だから，グラフより，

$$x=2,\ 3$$

$x=2$ のとき，

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$\therefore\quad y=9$

$x=3$ のとき，

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$\therefore\quad y=4$

以上より，

$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

（2） $1<x<y<z$ より，$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$\therefore\quad \dfrac{12}{5}<1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

$\therefore\quad 7x^3-15x^2-15x-5<0$

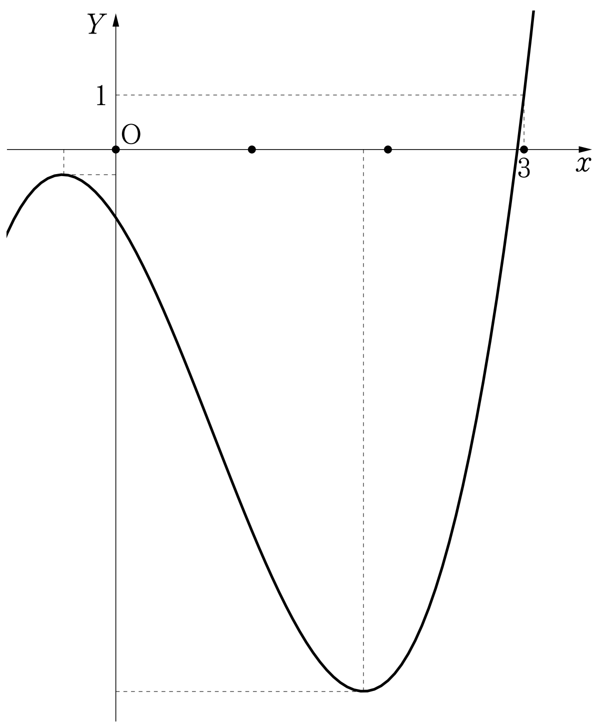
$Y=f(x)=7x^3-15x^2-15x-5$ とおくと，

$Y'=21x^2-30x-15$

$Y'=0$ とすると，$x=\dfrac{15\pm6\sqrt{15}}{21}$ だから，増減表は次の通りである。

x	$\cdots$	$\dfrac{5-2\sqrt{15}}{7}$	$\cdots$	$\dfrac{5+2\sqrt{15}}{7}$	$\cdots$
Y'	$+$	0	$-$	0	$+$
Y	↗		↘		↗

これより，$Y=f(x)$ のグラフは次の通りである。



ここで，

$f(2)=7\cdot2^3-15\cdot2^2-15\cdot2-5=-39$

$f(3)=7\cdot3^3-15\cdot3^2-15\cdot3-5=4$

だから，$f(x)<0$ となる x のうち，$1<x$ を満たす自然数は，

$x=2$

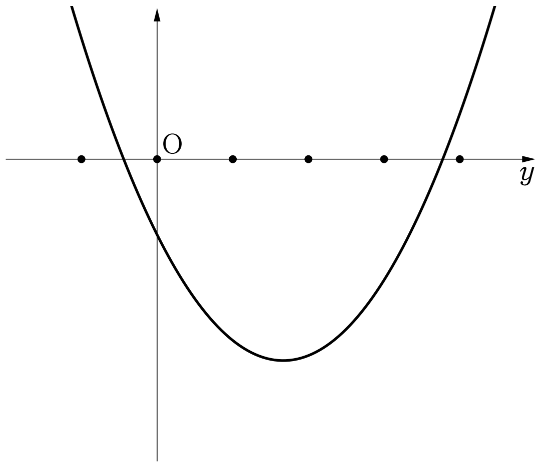
だけである。

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

$\therefore\quad \left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)<\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$

$\therefore\quad \dfrac{8}{5}<1+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^2}$

$\therefore\quad 3y^2-10y-5<0$



$3y^2-10y-5=0$ とすると，$y=\dfrac{5\pm2\sqrt{10}}{3}$

ここで，

$\dfrac{5+2\sqrt{10}}{3}<\dfrac{5+2\times3.5}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

だから，$2=x<y<4$ を満たす自然数は，

$y=3$

だけである。これを，① に代入して，

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{5}$$

$\therefore\quad 1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5}$

$\therefore\quad z=5\quad(x<y<z$ をみたす$)$

以上より，

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解説　実数全体で，2 次関数のグラフ，3 次関数のグラフをかき，そのグラフから不等式を満たす x の範囲をよみとる。これは他の方法でも同様で，例えば，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3>\dfrac{12}{5}$ にせよ，頭の中で，関数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ のグラフが減少関数であることをイメージして，$x=1,\ 2$ などと求めていることを整理しておきたい。