▶SSH 課題探究◀

4•24

n を 0 以上の整数とする。$n+1$ 個の自然数 2^0，2^1，2^2，……，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：例えば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である。

参考　N.K. 君のレポートより

最上位が 1 の n 桁の数 2^l は，

$$1\times10^{n-1} \leqq 2^l \leqq 2\times10^{n-1}$$

を満たす。これを，2 倍すると，

$$2\times10^{n-1} \leqq 2^{l+1} < 4\times10^{n-1}$$

となり，2^{l+1} は，最上位が 2 か 3 の n 桁の数である。

最上位が 2 の n 桁の数 2^l は，

$$2\times10^{n-1} \leqq 2^l \leqq 3\times10^{n-1}$$

を満たす。これを，2 倍すると，

$$4\times10^{n-1} \leqq 2^{l+1} < 6\times10^{n-1}$$

となり，2^{l+1} は，最上位が 4 か 5 の n 桁の数である。

最上位が 3 の n 桁の数 2^l は，

$$3\times10^{n-1} \leqq 2^l \leqq 4\times10^{n-1}$$

を満たす。これを，2 倍すると，

$$6\times10^{n-1} \leqq 2^{l+1} < 8\times10^{n-1}$$

となり，2^{l+1} は，最上位が 6 か 7 の n 桁の数である。

最上位が 4 の n 桁の数 2^l は，

$$4\times10^{n-1} \leqq 2^l \leqq 5\times2\times10^{n-1}$$

を満たす。これを，2 倍すると，

$$8\times10^{n-1} \leqq 2^{l+1} < 10^n$$

となり，2^{l+1} は，最上位が 8 か 9 の n 桁の数である。

また，最上位が 5，6，7，8，9 の n 桁の数 2^l は，

$$5\times10^{n-1} \leqq 2^l < 10^n$$

を満たす。これを 2 倍すると，

$$10^n \leqq 2^{l+1} < 2\times10^n$$

となり，2^{l+1} は，最上位が 1 の $n+1$ 桁の数である。

以上を，$n=1$，2，3，…… として繰り返すと，

$2^0=1$ から，

$$2^l \quad (l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

の最上位が 1 の数は，各桁に必ず 1 つだけある。

すなわち，最上位が 1 である数の個数と 2^n の桁数は一致する。

2^n が N 桁の数とする。（N は自然数）

すなわち，

$$10^{N-1} \leqq 2^n < 10^N$$

10 を底とする対数をとって，

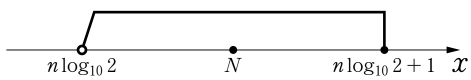
$$\log_{10}10^{N-1} \leqq \log_{10}2^n < \log_{10}10^N$$

$$\therefore\quad N-1 \leqq \log_{10}2^n < N$$

$$\therefore\quad \begin{cases} N-1 \leqq \log_{10}2^n \\ \log_{10}2^n < N \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} N \leqq \log_{10}2^n+1 \\ N > \log_{10}2^n \end{cases}$$

$$\therefore\quad n\log_{10}2 < N \leqq n\log_{10}2+1$$



上図の区間の差は，

$$(n\log_{10}2+1)-n\log_{10}2=1$$

だから，区間内に 1 つだけ自然数が存在し，その自然数は，

$$[\,n\log_{10}2+1\,]$$

である。

また，N は自然数だから，

$$N=[\,n\log_{10}2+1\,]=[\,n\log_{10}2\,]+1$$

である。従って，最上位が 1 であるものは，

$$[\,n\log_{10}2\,]+1\quad 個$$

ある。

解説　2^0，2^1，2^2，……，2^n は，1 から順に 2 倍，2 倍を繰り返して，

1，16，128，1024，……

と繰り上がるごとに 1 つ現れるから，2^n の桁数と最上位が 1 である個数は一致する。これに対して，どれくらいの説明が必要かが難しいが，N.K. 君のレポートのような説明で十分に伝わるのではないか。