▶SSH 課題探究 ◀

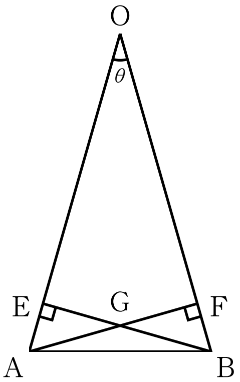
**2•5**

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす $s$, $t$ を $\theta$ を用いて表せ。

（2） 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの $\theta$ の値の範囲を求めよ。

参考　金子海渡君のレポートより




（1） $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ として考える。

$$\mathrm{OE}=\mathrm{OB}\cos\theta=\cos\theta$$
$$\mathrm{OF}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$$

これより，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

とおける。

また，

$$\mathrm{EG}:\mathrm{GB}=(1-s):s$$
$$\mathrm{FG}:\mathrm{GA}=(1-t);t$$

とおくと，（注意：この $s$ は問題文の $s$ とは別のもの）

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$
$$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(s\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行なベクトルではないので，

$$\begin{cases}1-t=s\cos\theta\\ t\cos\theta=1-s\end{cases}$$

$\therefore\quad(1-s\cos\theta)\cos\theta=1-s$

$\therefore\quad(s\cos\theta+s-1)(\cos\theta-1)=0$

ここで，$0<\theta<\pi$ なので，$\cos\theta\fallingdotseq 1$

よって，

$$s=\frac{1}{\cos\theta+1}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(s\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\vec{a}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\vec{b}$$

と表せる。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす，$s$，$t$ は，

$$s=t=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}$$

（2） 点 G が △OAB の外部または周上にあるとき，

$$s\leqq 0,\ t\leqq 0,\ s+t\geqq 1$$

である。

（ i ） $s\leqq 0$ または $t\leqq 0$ のとき，

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\leqq 0$$

よって，

$$-1<\cos\theta\leqq 0$$

$$\therefore\quad\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$$

（ii） $s+t\geqq 1$ のとき，

$$\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}\geqq 1$$

よって，

$$\cos\theta\geqq 1$$

このとき，$0<\theta<\pi$ をみたす $\theta$ は存在しない。

（ i ），（ii）より，

$$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$$

解説　点 G が △OAB の内部にあるとき，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ s+t<1\\ s>0,\ t>0\end{cases}$$

と表せることを学習している。これを否定して，点 G が △OAB の外部または周上を表すのは，

$$s\leqq 0\quad\text{または}\quad t\leqq 0\quad\text{または}\quad s+t\geqq 1$$

である。

記号の注意：「,」は「かつ」「または」の相反する言葉に対して同じ記号で扱う。

実数 $x$，$y$ に対して，

$(x-2)(y-3)=0$

$\therefore\quad x=2,\ y=3\quad(x=2$ または $x=3)$

$(x-2)^2+(y-3)^2=0$

$\therefore\quad x=2,\ y=3\quad(x=2$ かつ $y=3)$

である。少なくとも頭の中では「かつ」「または」を声を出して読みたい。

内藤信太郎君は，(1) で，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=u\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=u\vec{b}$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}=0$ より，$\vec{a}\cdot(\vec{b}-u\vec{a})=0\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}-u|\vec{a}|^2=0\therefore u=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\cos\theta(\because|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\cos\theta)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(\cos\theta)\vec{b}$ と求めている。これは，鋭角三角形，鈍角三角形，直角三角形などの形状に関係なく使える。

ただ，図形的に求めることを恐れてはいけない。数 $C$ の分野では，三角形を一つかいて極方程式を求めることはよくあることである。