▶SSH 課題探究 ◀

1•21

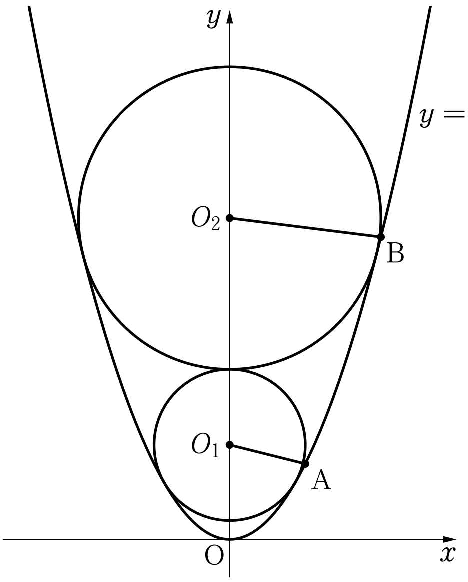
y 軸上の正の部分に中心をもち，放物線 $y=x^2$ と 2 点で接する円の列 O_1, O_2, $\cdots$, O_n, $\cdots$ を次の条件 (ｉ), (ii) をみたすように定める。

(ｉ)　O_1 の半径は 1 である。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき O_n は O_{n-1} に外接し，O_n の中心の y 座標は O_{n-1} の中心の y 座標より大きい。

このとき円 O_n の方程式を求めよ。

参考　M.Y. 君のレポートより



放物線 $y=x^2$ と円 O_1, O_2 の $x>0$ での接点をそれぞれ A$(a,\ a^2)$, B$(b,\ b^2)$ とおく。(題意より，$a \fallingdotseq 0$, $b \fallingdotseq 0$)

点 A での接線の傾きが $2a$ だから，点 A での法線は,

$$y=\frac{-1}{2a}(x-a)+a^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y=\frac{-1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\cdots ①$$

同様に，点 B での法線は,

$$y=\frac{-1}{2b}x+b^2+\frac{1}{2}\cdots ②$$

① で，$x=0$ とすると,

$$y=a^2+\frac{1}{2}$$

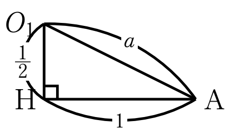
だから，円 O_1 の中心 O_1 の座標は,

$$O_1\left(0,\ a^2+\frac{1}{2}\right)$$

同様に，円 O_2 の中心 O_2 の座標は,

$$O_2\left(0,\ b^2+\frac{1}{2}\right)$$

である。



三平方の定理より,

$$1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+a^2$$

$$\therefore \quad a^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore \quad a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって,

$$O_1\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$$

円 O_2 の半径を r とすると，2 円が接していることを考慮して,

$$O_2\left(0,\ \frac{5}{4}+1+r\right)$$

一方，$O_2\left(0,\ b^2+\frac{1}{2}\right)$ だから,

$$\frac{5}{4}+1+r=b^2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad b^2=r+\frac{7}{4}$$

また，円 O_2 と放物線 $y=x^2$ が接することから，点 O_2 から，接線 $2bx-y-b^2=0$ までの距離は半径 r に等しい。

$$\therefore \quad r=\frac{\left|2b\times 0-\left(\frac{1}{2}+b^2\right)-b^2\right|}{\sqrt{4b^2+1}}$$

$$=\frac{\left|-\frac{1}{2}-2b^2\right|}{\sqrt{4b^2+1}}$$

$$=\frac{2b^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{4b^2+1}}$$

ここで，$b^2=r+\frac{7}{4}$ だから,

$$r=\frac{2r+\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{4r+8}}=\frac{2(r+2)}{2\sqrt{r+2}}$$

$$\therefore \quad r=\sqrt{r+2}$$

$$\therefore \quad r^2=r+2$$

$$\therefore \quad r^2-r-2=0$$

$$\therefore \quad (r+1)(r-2)=0$$

$r>0$ より，$r=2$

ゆえに，$O_2\left(0,\ \frac{17}{4}\right)$

以上の条件から，円が次々に接している様子を y 軸上で眺めて,

$$O_n\left(0,\ \frac{1}{4}+2(1+2+3+\cdots+n)-n\right)$$

$$\therefore \quad O_n\left(0,\ \frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}n(n+1)-n\right)$$

$$\therefore \quad O_n\left(0,\ n^2+\frac{1}{4}\right)$$

以上より，円 O_n の中心の座標 O_n と半径は,

$$O_n\left(0,\ n^2+\frac{1}{4}\right),\ \text{半径}\ n \quad \cdots\cdots(*)$$

と推定できる。

(*) を数学的帰納法で証明する。

証明)

[I]　解答の前半より，点 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ を中心とする半径 1 の円は放物線 $y=x^2$ に接するから $n=1$ のとき，条件 (ｉ) をみたし (*) は成り立つ。

［Ⅱ］　$n=k$（k は自然数）のとき，(*) が成り立つとすると，

$n=k+1$ のとき，半径が $k+1$ の円 O_{k+1} が円 O_k の上に接するとすると，円 O_{k+1} の中心の y 座標は，

$$\left(k^2+\frac{1}{4}\right)+\{k+(k+1)\}=(k+1)^2+\frac{1}{4}$$

であるから，円 O_{k+1} の中心の座標は，

$$\left(0,\ (k+1)^2+\frac{1}{4}\right)$$

であり，(*) の円 O_{k+1} の中心の座標に一致する。

次に，円 $x^2+\left\{y-\left((k+1)^2+\frac{1}{4}\right)\right\}^2=(k+1)^2$ と，放物線 $y=x^2$ が接するかを調べる

2 式を連立させて，

$$y+y^2-2\left((k+1)^2+\frac{1}{4}\right)y+\left((k+1)^2+\frac{1}{4}\right)^2=(k+1)^2$$

$$\therefore\quad y^2-2\left((k+1)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)y+\left((k+1)^2+\frac{1}{4}\right)^2-(k+1)^2=0$$

$$\therefore\quad y^2-2\left((k+1)^2-\frac{1}{4}\right)y+(k+1)^4+\frac{1}{2}(k+1)^2+\frac{1}{16}-(k+1)^2=0$$

$$\therefore\quad y^2-2\left((k+1)^2-\frac{1}{4}\right)y+(k+1)^4-\frac{1}{2}(k+1)^2+\frac{1}{16}=0$$

$$\therefore\quad \left\{y-\left((k+1)^2-\frac{1}{4}\right)\right\}^2=0$$

となり，y は重解をもつから円と放物線は接する。

従って，$n=k+1$ のときも (*) を満たす。

以上，［Ⅰ］［Ⅱ］から，すべての自然数 n に対して，(*) は成り立つ。

よって，円 O_n の方程式は，

$$x^2+\left(y-n^2-\frac{1}{4}\right)^2=n^2$$

である。

解説　放物線に接する最初の 2 円 O_1，O_2 の様子から円 O_n を予想することができ，それを数学的帰納法で証明しようとするところが面白い。条件（ｉ），（ii）と示すべき命題との関連をきちんとしておかないと数学的帰納法に乗せにくい。

参考　T.H. 君のレポートより

円 O_n の中心の座標を $(0,\ p_n)$，半径を r_n とすると，

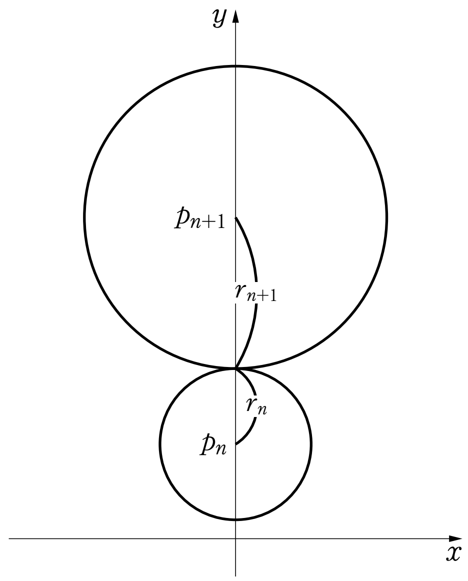
O_n：$x^2+(y-p_n)^2={r_n}^2$

O_{n+1}；$x^2+(y-p_{n+1})^2={r_{n+1}}^2$

となる。

条件（ii）から，

$$p_{n+1}-p_n=r_{n+1}+r_n\cdots①$$



グラフの y 軸に関しての対称性に注意して，

円 O_n と放物線 $y=x^2$ から，

$x^2+(y-p_n)^2={r_n}^2$，$y=x^2$ より，x^2 を消去して，

$$y+(y-p_n)^2={r_n}^2$$

$$\therefore\quad y^2+(1-2p_n)y+{p_n}^2-{r_n}^2=0\cdots②$$

よって，接することから，判別式 $D=0$

$$\therefore\quad (1-2p_n)^2-4({p_n}^2-{r_n}^2)=0$$

$$\therefore\quad 1-4p_n+4{r_n}^2=0$$

$$\therefore\quad p_n={r_n}^2+\frac{1}{4}\cdots③$$

条件（ｉ）から，$r_1=1$ より，

$$p_1=\frac{5}{4}$$

① へ ③ を代入して，

$${r_{n+1}}^2-{r_n}^2=r_{n+1}+r_n$$

$$\therefore\quad (r_{n+1}+r_n)(r_{n+1}-r_n)-(r_{n+1}+r_n)=0$$

$$\therefore\quad (r_{n+1}+r_n)(r_{n+1}-r_n-1)=0$$

$r_{n+1}+r_n>0$ なので，

$$r_{n+1}=r_n+1$$

よって，r_n は初項 1，公差 1 の等差数列なので，

$$r_n=1+(n-1)\cdot 1=n\cdots④$$

③ を ④ に代入して，

$$p_n=n^2+\frac{1}{4}$$

よって，求める円 O_n の方程式は，

$$x^2+\left(y-n^2-\frac{1}{4}\right)^2=n^2$$

解説　円と円が接し，円と放物線が 2 点で接し，しかも円の半径が 1 以上だから頂点で接することがない。だから y についての 2 次方程式で判別式 $D=0$ を考えればよいわけです。あぶないと思えば法線を利用することになりそうです。このように，漸化式の問題に持ち込めばやることが見えてくる。