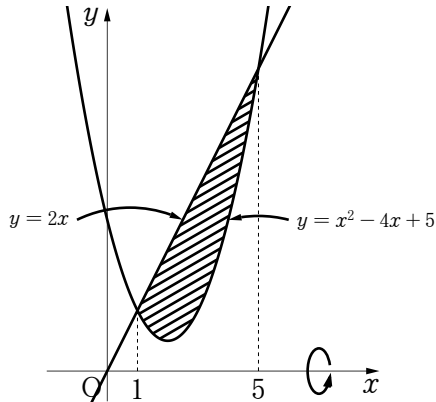


▶SSH 課題探究 ◀

12・16

放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2x$ とで囲まれた部分を x 軸と y 軸の周りに回転させてできる立体の体積をそれぞれ、 V_1, V_2 とする。このとき、体積比 $\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。

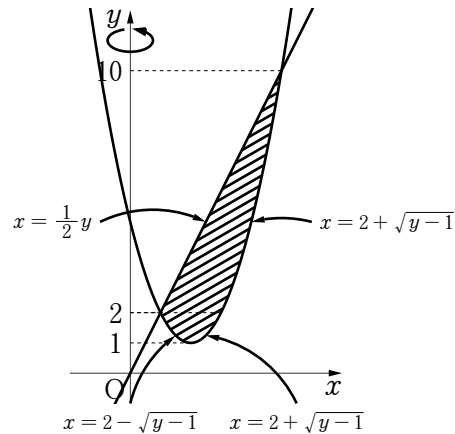
【参考】 O.M. さんのレポートより



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^5 (2x)^2 dx - \pi \int_1^5 (x^2 - 4x + 5)^2 dx \\ &= \pi \int_1^5 4x^2 dx \\ &\quad - \pi \int_1^5 (x^4 + 16x^2 + 25 - 8x^2 - 40x + 10x^2) dx \\ &= \pi \int_1^5 4x^2 dx - \pi \int_1^5 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25) dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_1^5 - \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{26}{3} x^3 - 20x^2 + 25x \right]_1^5 \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 5^3 - \frac{4}{3} \right) \\ &\quad - \pi \left(5^4 - 2 \cdot 5^4 + \frac{26}{3} \cdot 5^3 - 500 + 125 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5} + 2 - \frac{26}{3} + 20 - 25 \right) \\ &= \pi \left(625 - \frac{22}{3} \times 125 + 380 - 2 + \frac{1}{5} + \frac{22}{3} \right) \\ &= \pi \left(1003 - \frac{22 \times 124}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1408}{15} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^{10} (2 + \sqrt{y-1})^2 dy \\ &\quad - \pi \int_2^{10} \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy - \pi \int_1^2 (2 - \sqrt{y-1})^2 dy \\ &= \pi \int_1^{10} (y + 3 + 4\sqrt{y-1}) dy - \pi \int_2^{10} \frac{y^2}{4} dy \\ &\quad - \int_1^2 (y + 3 - 4\sqrt{y-1}) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + 3y + \frac{8}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} \\ &\quad - \frac{1}{12} \pi \left[y^3 \right]_2^{10} \\ &\quad - \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + 3y - \frac{8}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \pi \left\{ \left(50 + 30 + \frac{8}{3} \cdot 27 \right) \right\} - \pi \left\{ \left(\frac{1}{2} + 3 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\pi}{12} (1000 - 8) \\ &\quad - \pi \left\{ \left(2 + 6 - \frac{8}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} + 3 \right) \right\} \\ &= \pi \left(152 - \frac{992}{12} - 8 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \pi \left(144 - \frac{240}{3} \right) = \pi (144 - 80) = 64\pi \end{aligned}$$



$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1408}{15} \pi}{64\pi} = \frac{22}{15}$$

【解説】 計算量が多い。 V_1 は、

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \left\{ \int_1^5 (2x)^2 dx - \int_1^5 (x^2 - 4x + 5)^2 dx \right\} \\ &= \pi \int_1^5 \{2x + (x^2 - 4x + 5)\} \{2x - (x^2 - 4x + 5)\} dx \\ &= -\pi \int_1^5 (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 6x + 5) dx \\ &= -\pi \int_1^5 \{(x-1)^2 + 4\} (x-1) \{(x-1) - 4\} dx \\ &= -\pi \int_1^5 \{(x-1)^4 - 4(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 16(x-1)\} dx \\ &= -\pi \left[\frac{1}{5} (x-1)^5 - (x-1)^4 + \frac{4}{3} (x-1)^3 - 8(x-1)^2 \right]_1^5 \\ &= -\pi \left(\frac{4^5}{5} - 4^4 + \frac{4^4}{3} - 2 \cdot 4^3 \right) \\ &= -4^3 \pi \left(\frac{16}{5} - 4 + \frac{4}{3} - 2 \right) \\ &= -4^3 \pi \times \frac{48 - 90 + 20}{15} \\ &= -4^3 \pi \times \frac{-22}{15} = \frac{1408}{15} \pi \end{aligned}$$

というように、積分区間の上端または下端の数字を代入して 0 になる固まりを意識することもやってみるとよい。

V_2 は、円筒形の一枚一枚の薄い膜を足し合わせるような考え方として、

$$V_2 = \int_1^5 2\pi x \{2x - (x^2 - 4x + 5)\} dx = 64\pi$$

として求める者も多かった。いずれにせよ、何か説明を付けないと細かいことが気になるところである。