▶SSH 課題探究◀

11•8

空間内に 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) をとる。

（1） 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

（2） (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

（3） (1) における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

参考　M.T. 君のレポートより

（1） $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z-6 \end{pmatrix}\right\}=0$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3x \\ 3y-2 \\ 3z-6 \end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\quad 3x^2-3x+3y^2-2y+3z^2-6z=0$$

$$\therefore\quad x^2-x+y^2-\frac{2}{3}y+z^2-2z=0$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2=\frac{49}{36}$$

これより，点 P は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ を中心とする半径 $\frac{7}{6}$ の球面であるので成立する。

（2） 証）

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

点 Q が，A, B, C を通る平面上にあるための条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s, t が存在することである。

よって，

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -s-t=-\frac{1}{2} \\ 2s=\frac{1}{3} \\ 3t=1 \end{cases}$$

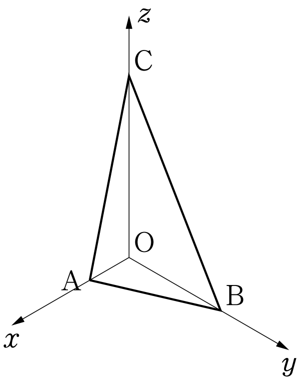
$$\therefore\quad s=\frac{1}{6},\ t=\frac{1}{3}$$

これより，実数 s, t は存在し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せるから，題意は成立する。

（3） $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$

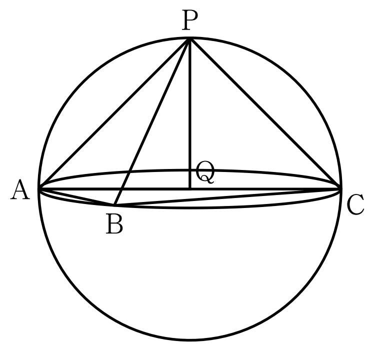


$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=1$$



よって，△ABC の面積は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1}$$

$$=\frac{7}{2}$$

点 P から平面 ABC に垂線 PD をひくと，体積 V が最大になるのは，PD が最大のとき，すなわち，点 D が点 Q に一致するときである。

よって，

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PQ}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{6}$$

$$=\frac{49}{36}$$

解説　ベクトルの成分は，横に並べる書き方と縦に並べる書き方がある。例えば，(1，2，3)と$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$のようなものである。空間の内積の計算では，縦に並べた方が x 成分と x 成分，y 成分と y 成分，z 成分と z 成分が見易いこともある。どちらでもよい。
(2) 平面のベクトルでよく使うように，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せることで，点Qが平面ABC上にあることを示している。

参考　N.D. 君のレポートより

（1）　証）

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$

$\iff$

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$\iff$

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$

$\iff$

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=0$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1}$$

とすると，

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=0$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$

よって，線分BCを2：1に内分する点をDとすると，点Pは定点A，Dを直径の両端とする球面上を動く。

この球の中心（線分ADの中点）をQとすると，点Pは定点Qから一定の距離にある。 ■

解説　成分表示を用いずに，式変形だけで示している分，定点Qの実態が線分BCを2：1に内分する点であると位置がはっきりする。平面上の2点A，Dを直径の両端とする円周上の点Pが，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ を満たすのと同じように，ベクトルであるから球面でも同様に扱える。

参考　N.S. 君のレポートより

（2）　証）

A，B，Cを通る平面上の点Qは，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots$①

$s+t+u=1\cdots$②

で表される。

すなわち，上式を満たす実数 s，t，u が存在することを示せばよい。

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)$

を満たす s，t，u を求めて，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで，$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3+1+2}{6}=1$

であり，①，②を満たす。 ■

解説　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$\iff\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，$1-t-u=s$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ s+t+u=1\end{cases}$$

と変形できる。

参考　M.Y. 君のレポートより

（2）　証）

平面ABCの方程式を，

$ax+by+cz=d\cdots$①

とおく。ただし，a，b，c のうち，少なくともいずれか一つは0ではない。…②

点A(1，0，0)が平面①上にあるから，

$a=d$

点B(0，2，0)が平面①上にあるから，

$2b=d$

点C(0，0，3)が平面①上にあるから，

$3c=d$

$\therefore\quad dx+\frac{d}{2}y+\frac{d}{3}z=d$

これは，$d=0$ とすると空間全体となり，平面を表さないから，$d\neq 0$

よって，平面ABCの方程式は，

$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\cdots$③

である。点Q$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$は方程式③を満たすから，点Qは平面ABC上にある。 ■

解説　座標空間上の平面の方程式が，

$$\begin{cases}ax+by+cz=d\\ a\neq 0 \text{ または } b\neq 0 \text{ または } c\neq 0\end{cases}$$

で与えられることを利用している。
例えば，点A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$を通り法線ベクトルが $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ である平面の方程式は，平面上の任意の点Pに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{v}$（$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ の場合も含む）であるから，内積が0を考えて，

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$
$$\iff\quad ax+by+cz=ax_1+by_1+cz_1$$

右辺を d とおくと平面の方程式が導ける。