▶SSH 課題探究◀

**9•11**

不等式 $1 \leqq \big||x|-2\big|+\big||y|-2\big| \leqq 3$ の表す領域を $xy$ 平面上に図示せよ。

参考 K.M. さんのレポートより ［その 1］

$1 \leqq \big||x|-2\big|+\big||y|-2\big| \leqq 3 \cdots ①$

（i） $|x|-2 \geqq 0$, $|y|-2 \geqq 0$ のとき，

すなわち，$x \leqq -2$, $2 \leqq x$, $y \leqq -2$, $2 \leqq y$ のとき，

① $\iff$ $1 \leqq |x|-2+|y|-2 \leqq 3$

$\iff$ $5 \leqq |x|+|y| \leqq 7$

$\iff$ $\begin{cases} |y| \geqq -|x|+5 \\ |y| \leqq -|x|+7 \end{cases}$

(ア) $2 \leqq x$, $2 \leqq y$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq -x+5 \\ y \leqq -x+7 \end{cases}$

(イ) $x \leqq -2$, $2 \leqq y$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq x+5 \\ y \leqq x+7 \end{cases}$

(ウ) $x \leqq -2$, $y \leqq -2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq -x-5 \\ y \geqq -x-7 \end{cases}$

(エ) $2 \leqq x$, $y \leqq -2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq x-5 \\ y \geqq x-7 \end{cases}$

（ii） $|x|-2<0$, $|y|-2 \geqq 0$ のとき，

すなわち，$-2<x<2$, $y \leqq -2$, $2 \leqq y$ のとき，

① $\iff$ $1 \leqq -|x|+2+|y|-2 \leqq 3$

$\iff$ $1 \leqq -|x|+|y| \leqq 3$

$\iff$ $\begin{cases} |y| \geqq |x|+1 \\ |y| \leqq |x|+3 \end{cases}$

(オ) $0 \leqq x<2$, $2 \leqq y$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq x+1 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

(カ) $-2<x<0$, $2 \leqq y$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x+3 \end{cases}$

(キ) $-2<x<0$, $y \leqq -2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq x-1 \\ y \geqq x-3 \end{cases}$

(ク) $0 \leqq x<2$, $y \leqq -2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq -x-1 \\ y \geqq -x-3 \end{cases}$

（iii） $|x|-2<0$, $|y|-2<0$ のとき，

すなわち，$-2<x<2$, $-2<y<2$ のとき，

① $\iff$ $1 \leqq -|x|+2-|y|+2 \leqq 3$

$\iff$ $-3 \leqq -|x|-|y| \leqq -1$

$\iff$ $1 \leqq |x|+|y| \leqq 3$

$\iff$ $\begin{cases} |y| \geqq -|x|+1 \\ |y| \leqq -|x|+3 \end{cases}$

(ケ) $0 \leqq x<2$, $0 \leqq y<2$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x+3 \end{cases}$

(コ) $-2<x<0$, $0 \leqq y<2$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq x+1 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

(サ) $-2<x<0$, $-2<y<0$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq -x-1 \\ y \geqq -x-3 \end{cases}$

(シ) $0 \leqq x<2$, $-2<y<0$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq x-1 \\ y \geqq x-3 \end{cases}$

（iv） $|x|-2 \geqq 0$, $|y|-2<0$ のとき，

すなわち，$x \leqq -2$, $2 \leqq x$, $-2<y<2$ のとき，

① $\iff$ $1 \leqq |x|-2-|y|+2 \leqq 3$

$\iff$ $1 \leqq |x|-|y| \leqq 3$

$\iff$ $\begin{cases} |y| \leqq |x|-1 \\ |y| \geqq |x|-3 \end{cases}$

(ス) $2 \leqq x$, $0 \leqq y<2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq x-1 \\ y \geqq x-3 \end{cases}$

(セ) $x \leqq -2$, $0 \leqq y<2$ のとき，

$\begin{cases} y \leqq -x-1 \\ y \geqq -x-3 \end{cases}$

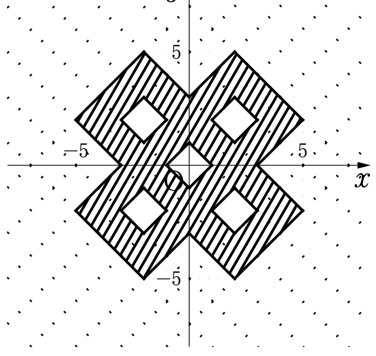
(ソ) $x \leqq -2$, $-2<y<0$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq x+1 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

(タ) $2 \leqq x$, $-2<y<0$ のとき，

$\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x+3 \end{cases}$

以上より，




図の斜線部分，境界も含む。

**解説** （その 1）では，絶対値をはずすために徹底的に場合分けして分割し，すべての領域を調べ尽くす。書く分量はとても多いが，現れる直線はいずれも描きやすいものばかり。場合分けは，$y$ 軸と平行な線で区間を分けるので，実際に領域を図示するときは，どのマス目が領域に含まれるか含まれないかと大雑把に考えた方が分かりやすいかもしれない。45°，−45° のひし形（正方形）のマス目のどこを塗ればよいかである。

**参考** K.M. さんのレポートより ［その 2］

$$1 \leqq \big||x|-2\big| + \big||y|-2\big| \leqq 3 \cdots ①$$

① は $x$ に $-x$ を入れても変わらないから，点 $(x,\ y)$ が領域上の点ならば，点 $(-x,\ y)$ も領域上の点になる。すなわち，$y$ 軸対称である。また，$y$ に $-y$ を代入しても変わらないから，$x$ 軸対称である。これより，原点対称でもある。また，文字 $x$ と $y$ を入れ替えても変わらないから，点 $(x,\ y)$ が領域上の点ならば，点 $(y,\ x)$ も領域上の点になる。すなわち，直線 $y=x$ に関して対称である。

以上のことから，次の領域 $D$ で調べる。

$$D:\ \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq x \end{cases}$$

以下は，$D$ を満たす範囲で考える。

（ i ） $x \leqq 2,\ y \leqq 2$ のとき，

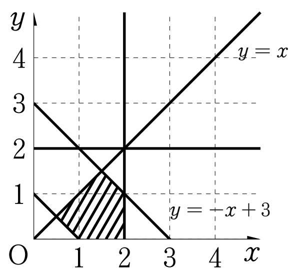
① $\iff 1 \leqq -x+2-y+2 \leqq 3$

$\iff -3 \leqq -x-y \leqq -1$

$\iff 1 \leqq x+y \leqq 3$

$\iff -x+1 \leqq y \leqq -x+3$

これより，領域 $D$ の範囲で，



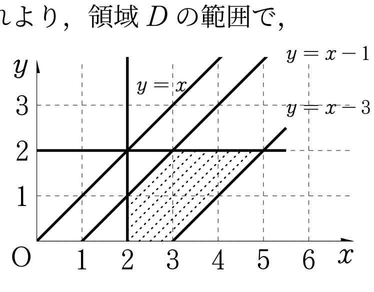

（ii） $2 \leqq x,\ y \leqq 2$ のとき，

① $\iff 1 \leqq x-2-y+2 \leqq 3$

$\iff 1 \leqq x-y \leqq 3$

$\iff x-3 \leqq y \leqq x-1$

これより，領域 $D$ の範囲で，



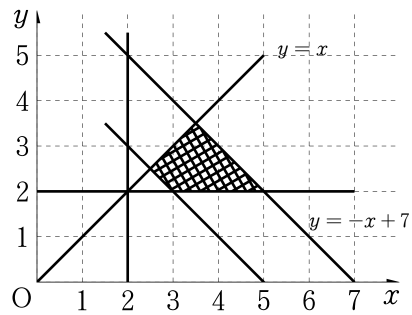

（iii） $2 \leqq x,\ 2 \leqq y$ のとき，

① $\iff 1 \leqq x-2+y-2 \leqq 3$

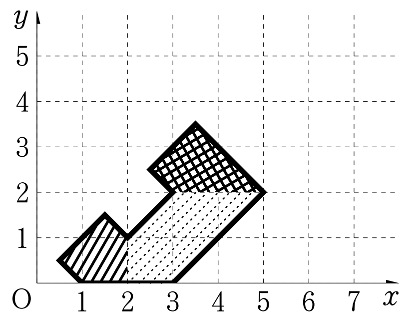
$\iff 5 \leqq x+y \leqq 7$

$\iff -x+5 \leqq y \leqq -x+7$

これより，領域 $D$ の範囲で，




（ i ）〜（iii）より，



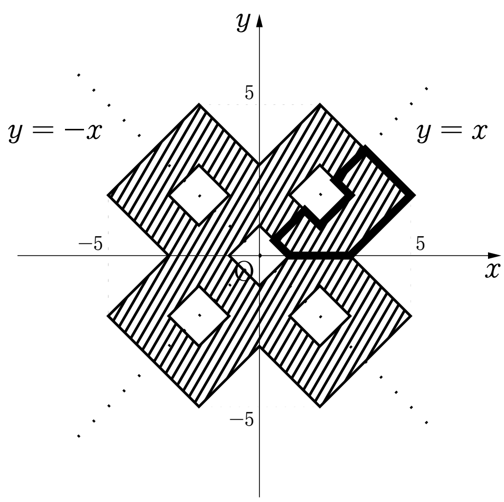

後は，万華鏡をイメージして，この図形を次のように加えて大きくしていく。

直線 $y=x$ で折り返した図形

$x$ 軸で折り返した図形

$y$ 軸で折り返した図形

これより，求める領域は図の斜線部分，境界線も含む。




**解説** （その 2）では，対称性に注目して，領域 $D$ という平面上であるがコーンのような狭い領域の中だけで調べて，そこから全体の領域を構成している。ところで，

$$1 \leqq \big||x|-2\big| + \big||y|-2\big| + \big||z|-2\big| \leqq 3$$

のような立体の形状や体積はどうなっているのだろうか。

参考　K.M. さんのレポートより　［その 3］

$$1 \leqq \big||x|-2\big| + \big||y|-2\big| \leqq 3 \cdots ①$$

① で，$x$ に $-x$ を代入すると，

$$1 \leqq \big||-x|-2\big| + \big||y|-2\big| \leqq 3 \iff ①$$

となり，① の表す領域は $y$ 軸対称である。

また，① で，$y$ に $-y$ を代入すると，

$$1 \leqq \big||x|-2\big| + \big||y|-2\big| \leqq 3 \iff ①$$

となり，① の表す領域は $x$ 軸対称である。

また，① で，$x$ と $y$ を入れ替えて，

$$1 \leqq \big||y|-2\big| + \big||x|-2\big| \leqq 3 \iff ①$$

となり，① の表す領域は直線 $y = x$ について対称である。

よって，ここからは，

$$D: \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq x \end{cases}$$

の範囲で考える。

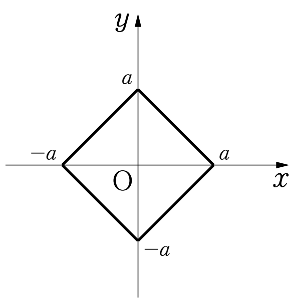
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より，① は，

$$1 \leqq |x-2| + |y-2| \leqq 3$$

である。ところで，

$$|x| + |y| = a \ (a > 0)$$

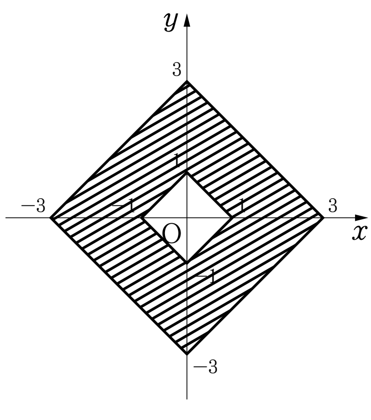
のグラフは，




と，このように表されるので，

$$1 \leqq |x| + |y| \leqq 3$$

の表す領域は，図の斜線部分で境界を含む。




領域　$1 \leqq |x-2| + |y-2| \leqq 3$

は，

領域　$1 \leqq |x| + |y| \leqq 3$

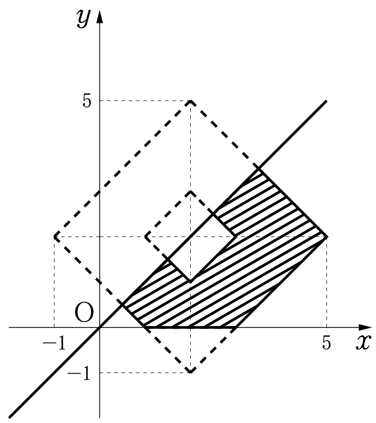
を $x$ 軸方向に 2，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した領域になるので，

$$D: \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq x \end{cases}$$

の範囲で，

$$1 \leqq |x-2| + |y-2| \leqq 3$$

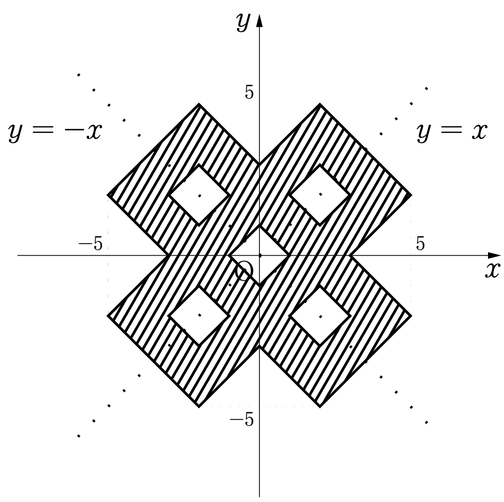
の表す領域は，以下のようになる。




以上より，対称性を考慮して，

$$1 \leqq \big||x|-2\big| + \big||y|-2\big| \leqq 3$$

の表す領域は，




求める領域は，図の斜線部分で境界を含む。

解説　（その 3）では，$|x| + |y| = 3$ のような図形は，頂点が $x$ 軸上，$y$ 軸上に乗る正方形であることと，$|x-2| + |y-2| = 3$ が，それを $x$ 軸方向，$y$ 軸方向へそれぞれ 2 だけ平行移動した図形であることを使うだけで簡潔に領域を求めている。