▶SSH 課題探究◀

8•22

a, b, c は正の実数で, $a+b=1$, $a^3+b^3+c^3=1$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

（1） c のとりうる値の範囲を求めよ。

（2） $a^2+b^2+c^2$ の最大値を求めよ。

参考　M.S. 君のレポートより

（1） $a+b=1$ の両辺を2乗して,

$$(a+b)^3=1$$
$$\iff \quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=1$$
$$\iff \quad a^3+b^3=1-3ab(a+b)$$
$$\iff \quad a^3+b^3=1-3ab \cdots ①$$

また, $a^3+b^3+c^3=1$ と ① より,

$$1-3ab+c^3=1$$
$$\therefore \quad ab=\frac{1}{3}c^3$$
$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=\dfrac{1}{3}c^3 \end{cases}$$

だから, a, b は2次方程式

$$t^2-t+\frac{1}{3}c^3=0 \cdots ②$$

の2つの正の解である。

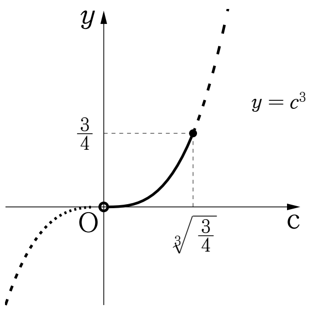
$$\therefore \quad \begin{cases} a+b=1>0 & \cdots ③ \\ ab=\dfrac{1}{3}c^3>0 & \cdots ④ \\ D=1-4\cdot\dfrac{1}{3}c^3 \geqq 0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

③ は成立。④ より,

$$c^3>0 \quad \iff \quad c>0$$

⑤ より,

$$c^3 \leqq \frac{3}{4}$$



以上より,

$$0<c\leqq\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

（2） $a+b=1$ から,

$$(a+b)^2=1$$
$$\iff \quad a^2+2ab+b^2=1$$
$$\iff \quad a^2+b^2=1-2ab$$

これに, $ab=\dfrac{1}{3}c^3$ を代入して,

$$a^2+b^2=1-2\cdot\frac{1}{3}c^3=1-\frac{2}{3}c^3$$

よって,

$$a^2+b^2+c^2=\left(1-\frac{2}{3}c^3\right)+c^2$$
$$=-\frac{2}{3}c^3+c^2+1$$

$f(c)=-\dfrac{2}{3}c^3+c^2+1$ とおく。

$$f'(c)=-2c^2+2c=-2c(c-1)$$

$f'(c)=0$ とおくと,

$$c=0,\ 1$$

また, $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}<1$ だから,

$f(c)$ の増減表は次の通り。

c	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$
$f'(c)$		$+$	
$f(c)$		↗	

よって, $f(c)$ の最大値は,

$c=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ のときにとり,

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2+1$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)$$

よって, $a^2+b^2+c^2$ の最大値は,

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)$$

解説　a, b が, $t^2-t+\dfrac{1}{3}c^3=0$ の2つの正の実数解であることから, 解の配置の問題として取り組む。$y=c^3$ のグラフから, c の範囲が $0<c\leqq\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ を導くなど, 丁寧に説明している。

参考　M.T. 君のレポートより

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdots ① \\ a^3+b^3+c^3=1 & \cdots ② \end{cases}$$

とおく。

（1） ① より,

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=1-3ab \cdots ③$$

a, b は正の実数なので, 相加平均・相乗平均に関する不等式と ① から,

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$
$$\iff \quad \frac{1}{4}\geqq ab$$

これに，条件 $a>0$，$b>0$ を加味して，

$$0<ab\leqq\frac{1}{4}$$

が成り立つ。これと，③ から，

$$\frac{1}{4}\leqq 1-3ab<1 \iff \frac{1}{4}\leqq a^3+b^3<1$$

であるから，② より，

$$\frac{1}{4}\leqq 1-c^3<1 \iff -\frac{3}{4}\leqq -c^3<0$$

$$\iff 0<c^3\leqq\frac{3}{4}$$

$$\iff 0<c\leqq\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

（２） a^2+b^2 のとり得る値の範囲は，

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=1-2ab\geqq\frac{1}{2} \quad \left(\because \quad ab\leqq\frac{1}{4}\right)$$

これより，

$$0<a^2+b^2\leqq\frac{1}{2}\cdots④$$

また，c^2 のとりうる値の範囲は，(1) の結果より，

$$0<c^2\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\cdots⑤$$

④，⑤ より，

$$0<a^2+b^2+c^2\leqq\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\cdots⑥$$

⑥ の符号は，$a=b=\dfrac{1}{2}$ かつ $c=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ のときに成り立ち，これは，①，② および，a，b，c が正の実数であることを満たす。よって，⑥ の等号は成立する。

以上より，$a^2+b^2+c^2$ の最大値は，

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

解説　$a>0$，$b>0$，$a+b=1$ (一定) であることから，相加相乗の不等式を用いて，$0<ab\leqq\dfrac{1}{4}$ を得る。⑥ での等号成立の説明が本質的であることを理解している。

参考　T.S. 君のレポートより

（１） $a+b=1$ より，

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=1-3ab$$

$$=1-3a(1-a)$$

$$=3a^2-3a+1\cdots①$$

① を，$a^3+b^3+c^3=1$ に代入して，

$$c^3=1-(3a^2-3a+1)$$

$$=-3a^2+3a\cdots②$$

ここで，$f(a)=-3a^2+3a$ とおく。

a は正の実数，かつ $a+b=1$ なので，

$$0<a<1$$

このとき，

$$f(a)=-3(a^2-a)$$

$$=-3\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$$

$$=-3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad 0<f(a)\leqq\frac{3}{4}$$

$$\iff 0<c^3\leqq\frac{3}{4}$$

$$\iff 0<c\leqq\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

（２） $a+b=1$ より，

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=1-2ab$$

$$=1-2a(1-a)$$

$$=2a^2-2a+1$$

これを，$a^2+b^2+c^2$ に代入して，

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2-a)+1+c^2$$

また，② より，

$$a^2-a=-\frac{1}{3}c^3$$

だから，

$$a^2+b^2+c^2=-\frac{2}{3}c^3+1+c^2$$

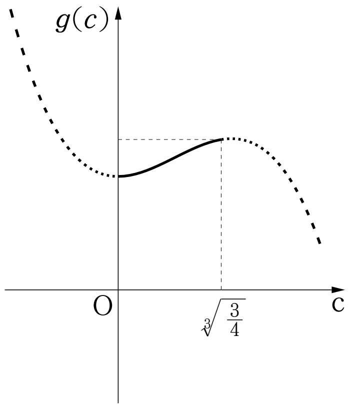
ここで，$g(c)=-\dfrac{2}{3}c^3+c^2+1$ とおく。

$$g'(c)=-2c^2+2c$$

$g'(c)=0$ とすると，

$$c=0,\ 1$$

(1) の範囲で $g(c)$ のグラフは，



グラフより，$g(c)=a^2+b^2+c^2$ の最大値は，$c=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$，$a+b+c=1$，$a>0$，$b>0$ をすべて満たす $(a,\ b,\ c)$ に対してとる。よって，求める最大値は，

$$g\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

解説　c^3 を文字 a だけで表し，$c^3=f(a)=-3a^2+3a$ のとり得る値の範囲を，$0<a<1$ で求めている。後半も一貫して，文字 c で表して $a^2+b^2+c^2$ のとり得る値の範囲を求めた。細かいところに工夫がある。