▶SSH 課題探究◀

6•6

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も含めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき，a，b，c の値を求めよ。

参考　S.K. さんのレポートより

方程式 $f(x)=0$ の整数解の 1 つを $x=n$ とおくと，

$f(n)=0$ より，

$n(n^3+an^2+bn+c)+1=0$

$\iff \quad n(n^3+an^2+bn+c)=-1$

となる。よって，n のとり得る値は，

$n=\pm 1$

（ i ）　$f(x)=0$ が，$x=1$，-1 の 2 つの整数解をもつとき，

$f(1)=1+a+b+c+1=0$

$\therefore \quad a+b+c+2=0 \cdots ①$

$f(-1)=1-a+b-c+1=0$

$\therefore \quad -a+b-c+2=0 \cdots ②$

① + ② より，

$2b+4=0 \qquad \therefore \quad b=-2$

①より，

$a+c=0 \qquad \therefore \quad c=-a$

$b=-2$，$c=-a$ だから，

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

条件から，$f(x)$ は $(x+1)(x-1)$ で割り切れるから，

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^2 & +ax & -1 & \\
\cline{3-6}
x^2-1 & \big) & x^4 & +ax^3 & -2x^2 & -ax \quad +1 \\
 & & x^4 & & -x^2 & \\
\cline{3-6}
 & & & ax^3 & -x^2 & -ax \\
 & & & ax^3 & & -ax \\
\cline{4-6}
 & & & & -x^2 & 1 \\
 & & & & -x^2 & 1 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+ax-1)$

条件より，方程式 $f(x)=0$ は虚数解を 2 つもつから，

$x^2+ax-1=0 \cdots ③$

は虚数解をもたなければならない。

ところが，

$D=a^2+4>0$ であり，方程式③は虚数解をもたないから題意を満たさない。

（ ii ）　$f(x)=0$ が $x=1$ を重解にもつとき，

与えられた $f(x)$ の係数に注目して，

$f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$（p は整数）

と表せる。これを，展開して整理すると，

$f(x)=(x^2-2x+1)(x^2+px+1)$

$=\{(x^2+1)-2x\}\{(x^2+1)+px\}$

$=(x^2+1)^2+(px-2x)(x^2+1)-2px^2$

$=x^4+2x^2+1+(p-2)x^3+(p-2)x-2px^2$

$=x^4+(p-2)x^3+2(1-p)x^2+(p-2)x+1 \cdots ④$

このとき，$x^2+px+1=0$ は虚数解をもつので，

$D=p^2-4<0 \qquad \therefore \quad -2<p<2$

p は整数なので，

$p=-1$，0，1

(ア)　$p=-1$ のとき，④より，

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2-3x+1$

$\therefore \quad a=-1$，$b=4$，$c=-3$

(イ)　$p=0$ のとき，④より，

$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

$\therefore \quad a=-2$，$b=4$，$c=-2$

(ウ)　$p=1$ のとき，④より，

$f(x)=x^4-x^3-x+1$

$\therefore \quad a=-1$，$b=0$，$c=-1$

（iii）　$f(x)=0$ が，$x=-1$ を重解にもつとき，

与えられた $f(x)$ の係数に注目して，

$f(x)=(x+1)^2(x^2+qx+1)$（q は整数）

と表せる。これを，展開して整理すると，

$f(x)=(x^2+2x+1)(x^2+qx+1)$

$=x^4+(q+2)x^3+2(q+1)x^2+(q+2)x+1 \cdots ⑤$

このとき，$x^2+qx+1=0$ は虚数解をもつので，

$D=q^2-4<0 \qquad \therefore \quad -2<q<2$

q は整数なので，

$q=-1$，0，1

(ア)　$q=-1$ のとき，⑤より，

$f(x)=x^4+x^3+x+1$

$\therefore \quad a=1$，$b=0$，$c=1$

(イ)　$q=0$ のとき，⑤より，

$f(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore \quad a=2$，$b=2$，$c=2$

(ウ)　$q=1$ のとき，

$f(x)=x^4+3x^3+4x^2+3x+1$

$\therefore \quad a=3$，$b=4$，$c=3$

以上，(ｉ)，(ii)，(iii) より，

$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),$
$(-1,\ 0,\ -1),\ (1,\ 0,\ 1)$
$(2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$

解説　$n(n^3+an^2+bn+c)=-1$ といった式変形をすることで，整数問題の特徴をつかんでいる。整数解が $x=1$ または $x=-1$ であることを導き，異なる整数解をもつときと，整数の重解をもつときで場合わけする，流れがわかりやすく身につけたい手法である。例えば，$x=1$ を重解にもつときは，$f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$ と表せるなど，与方程式の係数に注目した分，割り算の得をしてすっきりしている。

参考　N.S. 君のレポートより

方程式 $f(x)=0$ の整数解の1つを $x=n$ とおく。

$$\begin{array}{r|rrrrr} n & 1 & a & b & c & 1 \\ & & n & an+n^2 & bn+an^2+n^3 & cn+bn^2+an^3+n^4 \\ \hline & 1 & a+n & b+an+n^2 & c+bn+an^2+n^3 & \boxed{1+cn+bn^2+an^3+n^4} \end{array}$$

これより，余りが0，すなわち，

$$n^4+an^3+bn^2+cn+1=0$$

$\therefore\quad n(n^3+an^2+bn+c)=-1$

ここで，$n,\ a,\ b,\ c$ はそれぞれ整数なので，

$$\begin{cases} n=1 \\ n^3+an^2+bn+c=-1 \end{cases}\ \cdots Ⓐ$$

または，

$$\begin{cases} n=-1 \\ n^3+an^2+bn+c=1 \end{cases}\ \cdots Ⓑ$$

(ｉ)　$n=1$ のとき，Ⓐ より，

$$a+a+b+c=-1$$

$\therefore\quad a+b+c=-2\cdots$①

また，

$$f(x)=(x-1)\{x^3+(a+1)x^2+(b+a+1)x+(c+b+a+1)\}$$

$$g(x)=x^3+(a+1)x^2-(1+c)x+(-1)$$

とおく。($\because$　①)

方程式 $g(x)=0$ は1つの整数解と2つの虚数解をもつので，

その整数解を $x=m$ とおく。

$$\begin{array}{r|rrrr} m & 1 & (a+1) & -1-c & -1 \\ & & m & am+m^2+m & am^2+m^3+m^2-m-mc \\ \hline & 1 & a+m+1 & am+m^2+m-1-c & \boxed{am^2+m^3+m^2-m-mc-1} \end{array}$$

これより，余りが0，すなわち，

$$am^2+m^3+m^2-m-mc-1=0$$

$\therefore\quad m(am+m^2+m-1-c)=1$

ここで，$m,\ a,\ c$ はそれぞれ整数なので，

$$\begin{cases} m=1 \\ am+m^2+m-1-c=1 \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} m=-1 \\ am+m^2+m-1-c=-1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} m=1 \\ a-c=0 \end{cases}\quad \text{または，}\quad \begin{cases} m=-1 \\ a+c=0 \end{cases}$$

$m=1,\ a-c=0\cdots$② のとき，上の組立除法より，

$f(x)=0$

$\iff (x-1)^2\{x^2+(a+2)x+(a-c+1)\}=0$

$\iff\quad (x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}=0$

題意を満たすには，

2次方程式 $x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつ。

$\therefore\quad D=(a+2)^2-4\times 1<0$

$\therefore\quad a(a+4)<0 \iff -4<a<0\cdots$③

①，②，③より，

$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1),\ (-2,\ 2,\ -2),$
$(-3,\ 4,\ -3)$

$m=-1,\ a+c=0$ のとき，上の組立除法より，

$f(x)=0$

$\iff (x-1)(x+1)\{x^2+ax+(-a-c-1)\}=0$

$\iff\quad (x-1)(x+1)\{x^2+ax-1\}=0$

題意を満たすには，

2次方程式 $x^2+ax-1=0$ が虚数解をもたなくてはならない。

ところが，$D=a^2+4>0$ であるから，$x^2+ax-1=0$ は常に実数解をもつ，不適。

(ii)　$n=-1$ のとき，Ⓐ より，

$$-1+a-b+c=1$$

$\therefore\quad a-b+c=2\cdots$④

また，

$$f(x)=(x+1)\{x^3+(a-1)x^2+(b-a+1)x+(c-b+a-1)\}$$

$$h(x)=x^3+(a-1)x^2+(c-1)x+1$$

とおく。($\because$　④)

方程式 $g(x)=0$ の1つの整数解と2つの虚数解をもつので，

その整数解を $x=l$ とおく。

$$\begin{array}{r|rrrr} l & 1 & (a-1) & (c-1) & 1 \\ & & l & al+l^2-l & cl-l+al^2+l^3-l^2 \\ \hline & 1 & a+l-1 & c-1+al+l^2-l & \boxed{cl-l+al^2+l^3-l^2+1} \end{array}$$

これより，余りが0，すなわち，

$$cl-l+al^2+l^3-l^2+1=0$$

$\therefore \quad l(c-1+al+l^2-l)=-1$

ここで，l，a，c はそれぞれ整数なので，

$$\begin{cases} l=1 \\ a+c-1=-1 \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} l=-1 \\ -a+c+1=1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} l=1 \\ a+c=0 \end{cases} \quad \text{または，} \begin{cases} l=-1 \\ a-c=0 \end{cases}$$

$n=-1$，$l=1$ の場合は，（ｉ）の後半より不適。

$l=-1$，$a-c=0\cdots⑤$ のとき，上の組立除法より，

$f(x)=0$

$\iff (x+1)^2\{x^2+(a-2)x+(-a+c+1)\}=0$

$\iff \quad (x-1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}=0$

題意を満たすには，

2 次方程式 $x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつ。

$\therefore \quad D=(a-2)^2-4\times1<0$

$\therefore \quad a(a-4)<0$

$\therefore \quad a(a-4)<0 \iff 0<a<4\cdots⑥$

④，⑤，⑥より，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$

以上，（ｉ），（ii）より，

$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),$

$(-1,\ 0,\ -1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$

解説　組立除法を 3 回使っている。しかも，n，m，l の値を定めてはまた使う，面白い。組立除法は，商と余りが同時に見えるから，余りが 0 である条件と一緒に，虚数解をもつはずの 2 次方程式も現れる。細かい文字式の計算を多く含むから計算ミスには注意したい。

参考　T.T. 君のレポートより

方程式 $f(x)=0$ の整数解を $x=n$，m とおくと，$f(n)=0$ より，

$n(n^3+an^2+bn+c)=-1\cdots①$

ここで，n，n^3+an^2+bn+c は整数だから，

$n=1$ または $n=-1$

である。

また，①より，

$n=1$ のとき，$a+b+c+1=1$

$n=-1$ のとき，$a-b+c-1=1$

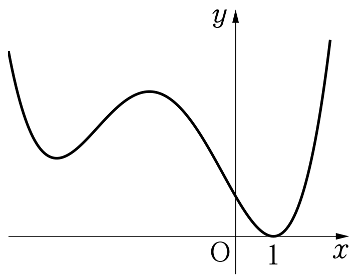
m についても同様だから，

$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (1,\ 1)$

の 4 通りある。

ここで，$(n,\ m)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

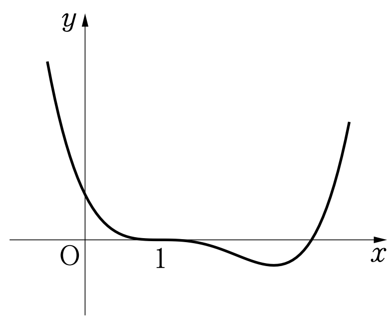
のように，方程式 $f(x)=0$ が重解をもつとき，合わせて，残りの 2 つの解が虚数解であることを含めると，次のグラフのように，x が重解の値で極値をもち，その点で x 軸に接する。



また，方程式 $f(x)=0$ が 3 重解のときは，その値で極値をとらない。

下のグラフは，$y=(x-1)^3(x-2)$ のグラフ

（x 軸と y 軸の縮尺は違う）



以上のグラフをイメージして，

（ｉ）　$(n,\ m)=(1,\ 1)$ のとき，

$a+b+c+1=-1$ であり，さらに，

関数 $f(x)$ は，$x=1$ で極値（極小値）をとるから，

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ より，

$f'(1)=3a+2b+c+4=0$

これに，$c=-1-b-2\cdots②$ を代入して，

$f'(1)=2a+b+2=0$

よって，$b=-2a-2\cdots③$

このとき，

$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1$

である。これより，方程式 $f(x)=0$ は，

「相反方程式」であるから，また，

$f(0)\fallingdotseq 0$ より，

$x^2+ax-(2a+2)+ax^{-1}+x^{-2}=0$

ここで，$t=x+x^{-1}$ とおくと，

$t^2+at-2a-4=0$

$\therefore\quad (t-2)\{t+(a+2)\}=0$

$\therefore\quad t=2,\ -(a+2)$

$t=2$ のとき，$x=1$ を重解にもつ。

$t=-(a+2)$ のとき，

$x^2+(a+2)x+1=0$

この方程式の判別式 D は，

$D=(a+2)^2-4<0$

$\therefore\quad -2<a+2<2$

$\therefore\quad -4<a<0$

a は整数だから，

$a=-3,\ -2,\ -1$

②，③より，

$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),$

$(-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$(n,\ m)=(-1,\ -1)$ のとき，

同様に，$y=f(x)$ は，$x=-1$ で極値をとるので，

$f'(-1)=3a-2b+c-4=0$

また，$a-b+c-1=1$ より，

$c=-1+b+2\cdots$④ より，

$f'(-1)=2a-b-2=0$

$\therefore\quad b=-2a-2\cdots$⑤

$\therefore\quad f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1$

$f(0)\neq 0$ より，同様に，

$x^2+ax+(2a-2)+ax^{-1}+x^{-2}=0$

$t=x+x^{-1}$ とおくと，

$t^2+at+2a-4=0$

$\therefore\quad (t+2)\{t+(a-2)\}=0$

$\therefore\quad t=-2,\ -(a-2)$

$t=-2,\ -(a-2)$

$t=-2$ のとき，$x=-1$ を重解にもつ。

$t=-(a-2)$ のとき，同様に，

$D=(a-2)^2-4<0$

$\therefore\quad -2<a-2<2$

$\therefore\quad 0<a<4$

a は整数だから，

$a=1,\ 2,\ 3$

④，⑤より，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),$

$(3,\ 4,\ 3)$

(iii)　$(n,\ m)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ のとき，

$a+b+c=-2$

$a-b+c=2$

辺々足して，

$2a+2c=0$

$a=-c\qquad\therefore\quad c=-a$

辺々引いて，

$2b=-4\qquad\therefore\quad b=-2$

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

これが，$(x-1)(x+1)=x^2-1$ で割り切れるから，

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2\ +ax\ \ -1 \\ \hline
x^2\ -1 & x^4+ax^3-2x^2-ax+1 \\
 & x^4\qquad\ \ -x^2 \\ \hline
 & \quad ax^3-x^2-ax \\
 & \quad ax^3\qquad -ax \\ \hline
 & \qquad\quad -x^2\qquad 1 \\
 & \qquad\quad -x^2\qquad 1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

$\therefore\quad f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+ax-1)$

ここで，$x^2+ax-1=0$ の判別式 D は，

$D=a^2+4>0$

となり，方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつことに反するから，不適。

以上，(i)，(ii)，(iii)より，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 0,\ -1),$

$(2,\ 2,\ 2),\ (-2,\ 2,\ -2),$

$(3,\ 4,\ 3),\ (-3,\ 4,\ -3)$

解説　整数問題に対し，グラフの性質を利用するのは興味を引く。実数解を 2 個，虚数解を 2 個もつ方程式 $f(x)=0$ について，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から，重解をもつところで必ず極値をもつことに注目して，a，b，c の条件式を導く。そこから，$x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=0$ のような相反方程式（係数が，1，a，$-(2a+2)$，a，1 と左右対称な式）が出てくるところがまた面白い，色々な数学が楽しめる。

多項式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れるための必要十分条件が，$f(a)=f'(a)=0$ であることも確認しておきたい。