▶SSH 課題探究◀

5•2

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

参考　K.M. さんのレポートより

条件より，$0<m\leqq 2N$，$0<n\leqq 2N$ …①

$x^2-nx+m=0$ が実数解をもつから，

$$y=f(x)=x^2-nx+m$$
$$=\left(x-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n^2}{4}+m$$

より，

$$-\frac{n^2}{4}+m\leqq 0$$
$$\iff\quad n^2-4m\geqq 0$$
$$\iff\quad (n+2\sqrt{m})(n-2\sqrt{m})\geqq 0$$

$n>0$ より，

$$n\geqq 2\sqrt{m}\cdots②$$

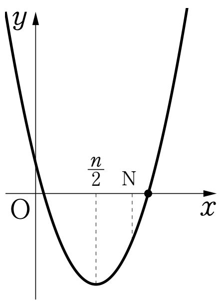
また，①より，

$$0<\frac{n}{2}\leqq N$$

つまり，放物線の軸は直線 $x=N$ より左にあるので，方程式が N 以上の解をもつには，

$$f(N)\leqq 0$$

になればよいから，



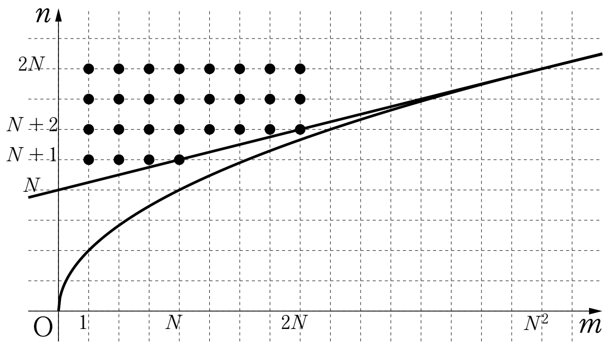
$$f(N)=N^2-nN+m\leqq 0$$
$$\therefore\quad n\geqq\frac{1}{N}m+N\cdots③$$

mn 平面で，

$n=2\sqrt{m}$ と $n=\dfrac{1}{N}m+N$ のグラフの共有点を調べると，

$$n=\frac{1}{N}\cdot\frac{n^2}{4}+N$$
$$\therefore\quad n^2-4Nn+4N^2=0$$
$$\therefore\quad (n-2N)^2=0$$
$$\therefore\quad n=2N,\ m=N^2$$

すなわち，点 $(N^2,\ 2N)$ のみである。



（ｉ）　$2N\leqq N^2$ のとき，

すなわち，$N\geqq 2$ のとき，

グラフより，格子点の個数は，

$N\leqq n\leqq N+2$ では，

$n=k$ 上に，$kN-N^2$ 個の格子点が並び，

$N+2<n\leqq 2N$ では，

$n=k$ 上に，$2N$ 個の格子点が並ぶ。

これより，

$$\sum_{k=N}^{N+2}(kN-N^2)+\{2N-(N+2)\}\times 2N$$
$$=\{N^2-N^2+(N+1)N-N^2+(N+2)N-N^2\}+(N-2)\times 2N$$
$$=2N^2-N\quad 個$$

（ii）　$N=1$ のときは，

$$1\leqq m\leqq 2,\ 1\leqq n\leqq 2,\ n\geqq m+1$$

より，$(m,\ n)=(1,\ 2)$ の 1 個であるが，これは，（ｉ）に含まれる。

以上より，

$$N\geqq 1 で，2N^2-N\quad 個$$

解説　$f(N)\leqq 0\implies D\geqq 0$ なので，条件③が成り立つとき，条件②は $n\geqq\dfrac{1}{N}m+N\geqq 2\sqrt{m}$ として自然に成り立つ。問題では，$1\leqq n\leqq 2N$ という条件があるので，方程式の 2 つの解のうち，大きいもののみが N 以上になる場合を考えればよいが，$n>2N$ の場合には，$D\geqq 0$，$f(N)\geqq 0$，$\dfrac{n}{2}\geqq 0$ の 3 つの条件を考える場合もあるから条件 $D\geqq 0$ は落とせない。場合分けの（ｉ）では，$2N\leqq N^2\iff N\geqq 2$ のとき，としているが，y 軸上の，$N+2\leqq 2N\iff N\geqq 2$ である条件を考慮した方がよい。K.M. さんのレポートは実数解をもつ条件が余分ではあったが，グラフを利用して，x 軸に平行な直線上の格子点の数を丁寧に調べている。$N=1$ のときの扱いもきちんとしている。

参考　I.K. 君のレポートより

2 次方程式の解の公式より,

$$x=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4m}}{2}$$

題意をみたす条件は,

$$n^2-4m\geqq 0\cdots①$$

かつ,

$$\frac{n+\sqrt{n^2-4m}}{2}\geqq N\cdots②$$

$$\iff\quad \sqrt{n^2-4m}\geqq 2N-n$$

ここで, 条件より, $2N-n\geqq 0$ だから, 両辺を 2 乗して,

$$n^2-4m\geqq 4N^2-4Nn+n^2$$

$$\therefore\quad N^2-Nn+m\leqq 0\cdots③$$

ここで, ③より,

$$0<m\leqq -N^2+Nn$$

だから, 条件①は,

$$\begin{aligned}n^2-4m&\geqq n^2-4(-N^2+Nn)\\&=n^2-4Nn+4N^2\\&=(n-2N)^2\geqq 0\end{aligned}$$

で, ①は成り立つ。

以上より, $2N-n\geqq 0$ のとき,

① かつ ②　$\iff$　③

すなわち, 題意をみたす条件は,

$$N^2-Nn+m\leqq 0$$

$$\iff$$

$$N^2\leqq Nn-m\cdots④$$

だけである。

各 N に対して, n の最大値を n' とすると,

$$\frac{1}{2}n'=N$$

($\because$　n の最大値は $2N$)

○　$n=\frac{1}{2}n'=N$ のとき,

④より,

$$N^2\leqq\frac{1}{2}n'\times N-m$$

$$\iff\quad N^2\leqq N^2-m$$

となり, 格子点 $(m,\ n)$ の組は存在しない。

○　$n=\frac{1}{2}n'+1=N+1$ のとき,

④より,

$$\begin{aligned}N^2&\leqq\left(\frac{1}{2}n'+1\right)\times N-m\\&=N^2+N-m\end{aligned}$$

これが成り立つ条件は,

$$N-m\geqq 0$$

すなわち,

$$m\leqq N$$

である。これより,

$n=N+1$ では, 格子点 $(m,\ n)$ の組は N 個。

○　$N=\frac{1}{2}n'+k+1$ $(k\geqq 1)$ のとき,

④より,

$$\begin{aligned}N^2&\leqq\left(\frac{1}{2}n'+k+1\right)\times N-m\\&=N^2+Nk+N-m\end{aligned}$$

これが成り立つ条件は,

$$Nk+N-m\geqq 0$$

$$\therefore\quad m\leqq N(k+1)$$

ここで, $k+1\geqq 2$

しかし,

$$m\leqq 2N\leqq N(k+1)$$

なので,

$$m\leqq 2N$$

となる。これより,

$n=N+k+1$ $(k\geqq 1)$ では, 格子点 $(m,\ n)$ の組は $2N$ 個である。

すなわち, $n\geqq N+2$ では, $2N$ 個である。

よって,

$n=N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N$ の $N-1$ 個に対して, $2N$ 個ずつある。

以上より,

$$N+2N(n-1)=N(2N-1)\quad 個$$

である。

解説　始めに解の公式を見せるところから, 式変形で押していく気持ちがでていて一貫している。n の最大値を n' とすると, $\frac{1}{2}n'=N$ といったところに表現の苦労を察するが, グラフに頼らないのも面白い。後は, 解の公式を利用したのだから, 小さいほうの解 $x=\frac{n-\sqrt{n^2-4m}}{2}$ が必要でない理由が, 条件 $1\leqq n\leqq 2N$ があるためで, この条件を単に「n が自然数である」としたとき (m も) どうなるかの考察を入れるとよい。