



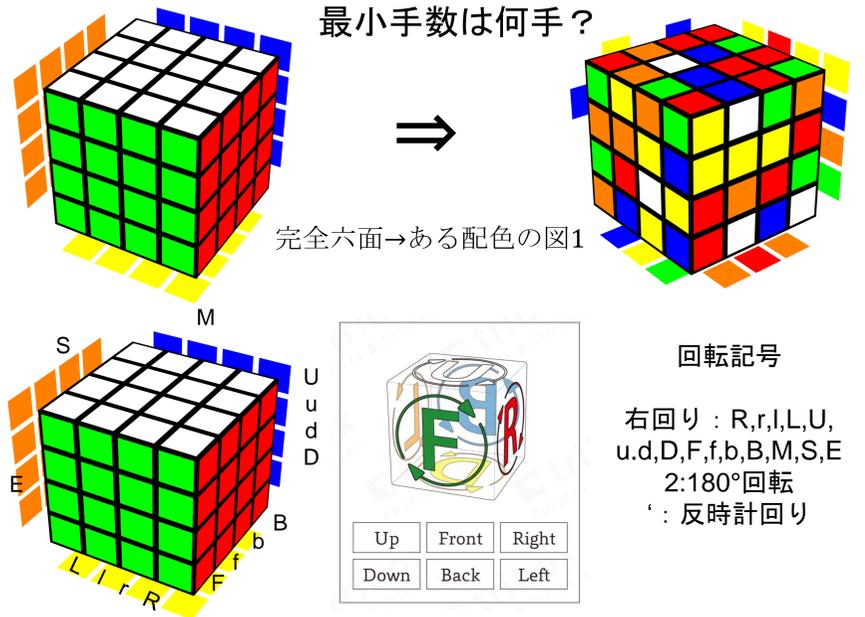
ルービックキューブ「神の数字」

竹内 諒太、大脇 蒔人、小松 倫也、中村 和希 指導者 武田 光典
伊那北高校 理数科 課題研究 数学班

緒言

最も効率的にルービックキューブを解くアルゴリズムにおいて、最も手数がかかるとき、その手数を最小手数、また「神の数字」という。3x3x3ルービックキューブの最小手数は20手であることが知られているが4x4x4のルービックキューブ(以降RC(4))では最小手数はわかっていない。今回の研究ではRC(4)の最小手数が何手であるかを3個の方法から求めようとした。研究①：ルービックキューブの組み合わせ数を用いて最小手数を表す 研究②：計算量理論を用いた解くことが不可能であることの証明 研究③：プログラミングを用いて最小手数を求める

また以降RC(4)において最小手数を求めるとき、右図1のように完成された配色からある配色になる時の手数を考える。RC(4)の回転記号は右図のようである。



実験方法

- ・ n手における配色のパターンの和を数式で表す→RC(4)の総通りに達した時のn手が最小手数
- ・ プログラミングによって28手ですべての配色になるのかを検証する
- ・ 計算量理論を用いて最小手数を求めるアルゴリズムは計算不可能であることを示す

組み合わせ数と最小手数

RC(4)の組み合わせの総通りが約 7.4×10^{45} と判明している。このことを利用して、最小手数を求める。下記の表の太字・下線が付されているものは、2手であると確かめられたものである。3手目以降ではそれぞれの場合に対して上記の表で調べた場合の数が考えられるのでそれぞれの数の累乗で表せる。

例) R',L(2手)→M'(1手) : 1手で表すことができる
R,r2(2手)→確実に2手を要さないといけない

【表2】組み合わせとその手数

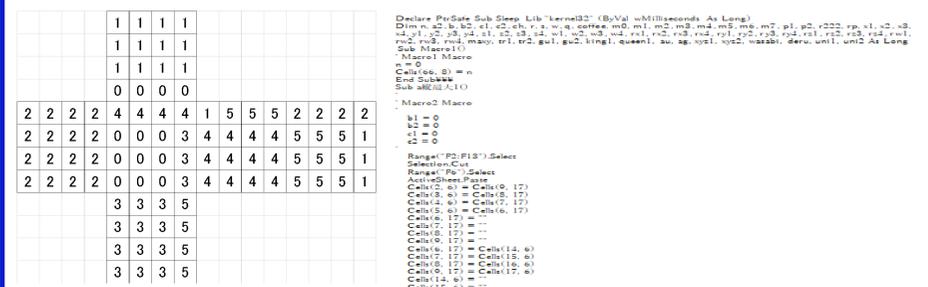
R系統	R2系統	R'系統	r系統	r2系統	r'系統	Rw系統	Rw2系統	Rw'系統
R r	Rw	R r						
R2 r2	2	R2 r2						
R' r'	Rw'	R' r'						
L l	Lw	L l						
L2 l2	Lw2	L2 l2						
L' l'	Lw'	L' l'						
M E S	M E S	M E S	M E S	M E S	M E S	M E S	M E S	M E S
M2 E2 S2								
M' E' S'								
2手 1手								
17 10	17 10	17 10	15 3	15 3	15 3	13 5	12 6	11 7

M系統	M2系統	M'系統
R r	Rw	R r
R2 r2	Rw2	R2 r2
R' r'	Rw'	R' r'
L l	Lw	L l
L2 l2	Lw2	L2 l2
L' l'	Lw'	L' l'
M E S	M E S	M E S
M2 E2 S2	M2 E2 S2	M2 E2 S2
M' E' S'	M' E' S'	M' E' S'
2手 1手	2手 1手	2手 1手
12 7	14 7	12 7

第n手動かしたときに考えられる場合の数の和が組み合わせの総通りに達したとき、その時のnが最小手数となる。よって計算するとn=28手であった。しかし今回の研究では重複を完全に省くことが出来なかったため $n \geq 28$ 手する。

プログラミング

組み合わせ数から求められた28手が本当に最小手数であるのかをプログラミングを用いて検証する。RC(4)の各ブロックの面それぞれに数字を振り、各々の回転が行われたとき数字を正しい場所に移動させる。1~28手で組み合わせの総通りに達すればよい



R,Uの配色

用いたプログラミング(一部抜粋)

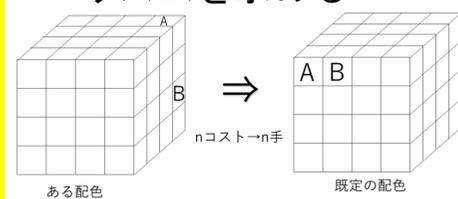
現在で約5000パターンを確認することが出来た。

計算量理論

オーダー記法

$$\begin{matrix}
 1手 & \dots & 2手 & \dots & n手 \\
 U & & U & & U \\
 u & & u & & u \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 B & & B & & B \\
 b & & b & & b
 \end{matrix}
 \Rightarrow O(72^n)$$

NP完全：最小手数を求めるアルゴリズムが充足可能性問題を満たせばよい
NP困難：巡回セールスマン問題 \leq 最小手数のアルゴリズムを求める



上記の研究において確実な根拠を得ることが出来なかった。

結論

今回の研究では、RC(4)の最小手数は28手以上であると考えられる。計算量理論では最小手数を求めるアルゴリズムが計算不可能であることを示そうとしたが、確実な根拠に欠けたため今回の研究では求めることが出来なかった。