



コラッツ予想の数式変更による結果の分析

松崎陽人、村田優風、柄澤創太郎 指導教諭 岡村祐一

伊那北高校 理数科 課題研究 数学班

緒言

コラッツ予想とは、任意の正の整数 n をとり、
 n が偶数の場合、 n を 2 で割る
 n が奇数の場合、 n に 3 をかけて 1 を足す($3n+1$)
という操作を繰り返した場合、 **n がどのような値であっても 1 に到達する**という予想である。
この予想は現在も未解決であるため証明は非常に困難だが、この予想の条件を変更することによって違った視点から新しい発見をすることができるかもしれないと考え、さらに証明の手助けもできるかもしれないと考えた。

研究方法

$3n+k$ の k , n に奇数を代入する。 n が偶数なら2で割り、 n が奇数なら3をかけて k をたすという操作を繰り返す。1に到達した、もしくは以前出現した数が再び出現した段階で操作を終了する。(数値が繰り返されることを「ループする」ということにする)
 k に偶数を代入した場合、計算結果に偶数が出現しなくなってしまう数が大きくなり続ける。 n に偶数を代入した場合最初の操作は2で割るという操作である。この場合、いつかは奇数になる。よって k , n に偶数は代入する必要はないということになる。また、計算にはマイクロソフト社提供の表計算ソフト Excel を使用し、 $k=81, n=101$ までを計算した。(2000通り)

結果

- k が3の倍数の時には n がどのような奇数であっても1に到達しない
- $3n+k$ の n に k の奇数倍の数を入力すると、 k を含むループが発生する
(例: $3n+7$ のとき、 $n=7$ や $n=21$ 、 $n=49$ などで計算すると7でループする)
- k が 3 の累乗のときは n がどのような奇数であっても k を含むループが発生する。(例: $3n+3$ のとき3でループ、 $3n+9$ のとき9でループ)
- $k=m$ として $3n+m$ が p でループするとき、 $3n+3m$ は $3p$ でループする。
(例: $3n+5$ のとき1,5,19のループが現れ、 $3n+15$ のとき3,15,57のループが現れる) ただし、 n の値が等しいとは限らない。

データ

$k=3$ $3 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \dots$	$k=7$ $n=3, 9, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 33, 37, 39,$ $41, 43, 45, 47, 53, 55, 57, 59, 65, 67, 69, 71, 75,$ $81, 83, 85, 87, 89, 93, 97, 99, 101$ 1に到達
$k=9$ $9 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \dots$	$n=5, 11, 27, 51, 61, 73, 79, 95$ 5でループ $n=7, 21, 35, 49, 63, 77, 91$ 7でループ
$k=27$ $27 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27 \dots$	$k=21$ $n=3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 33,$ $37, 39, 41, 43, 45, 47, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 65,$ $67, 69, 71, 73, 75, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 93, 95,$ $97, 99, 101$ 15でループ $n=7, 21, 35, 49, 63, 77, 91$ 21でループ
$k=81$ $81 \rightarrow 324 \rightarrow 162 \rightarrow 81 \dots$	

考察

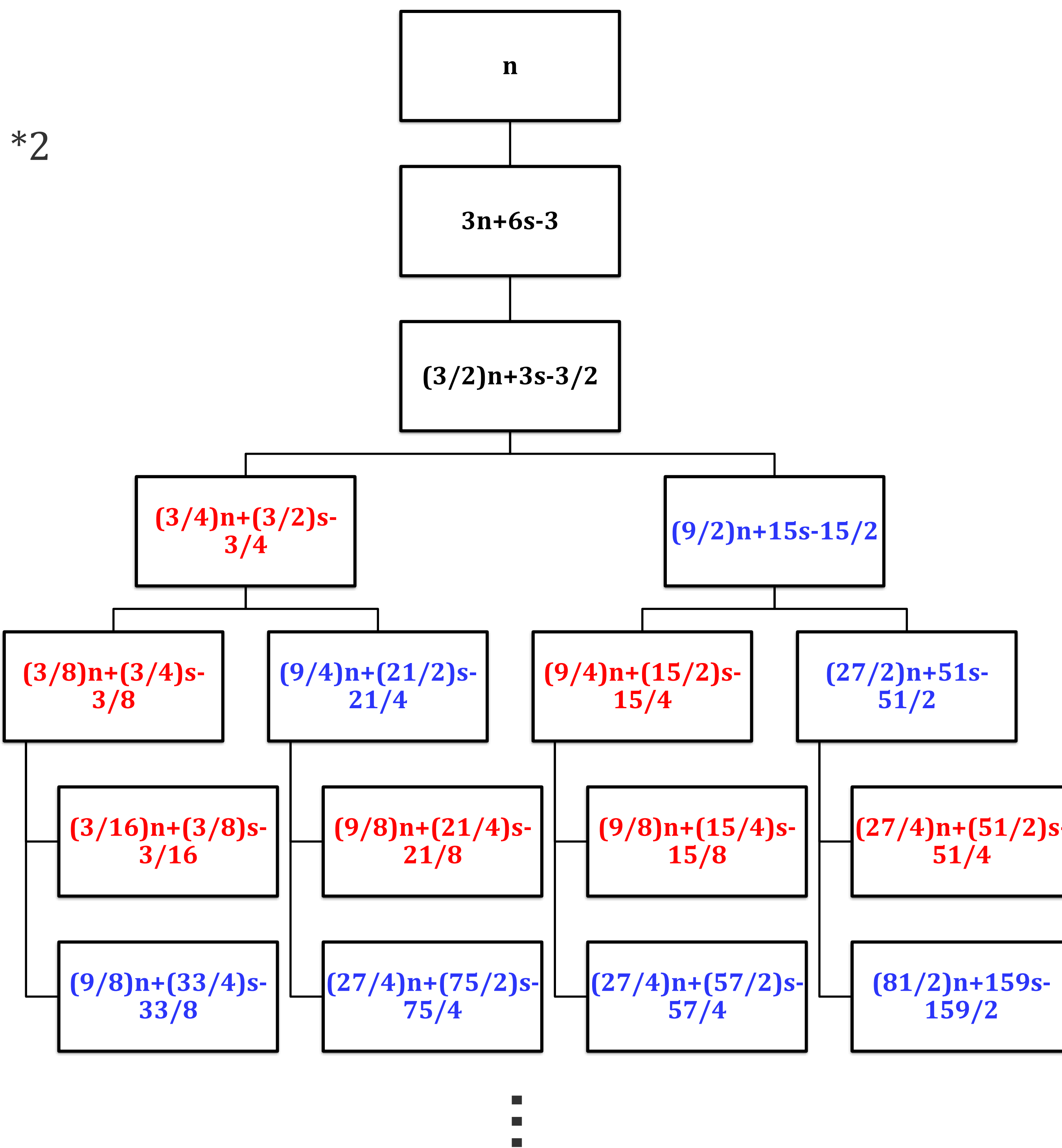
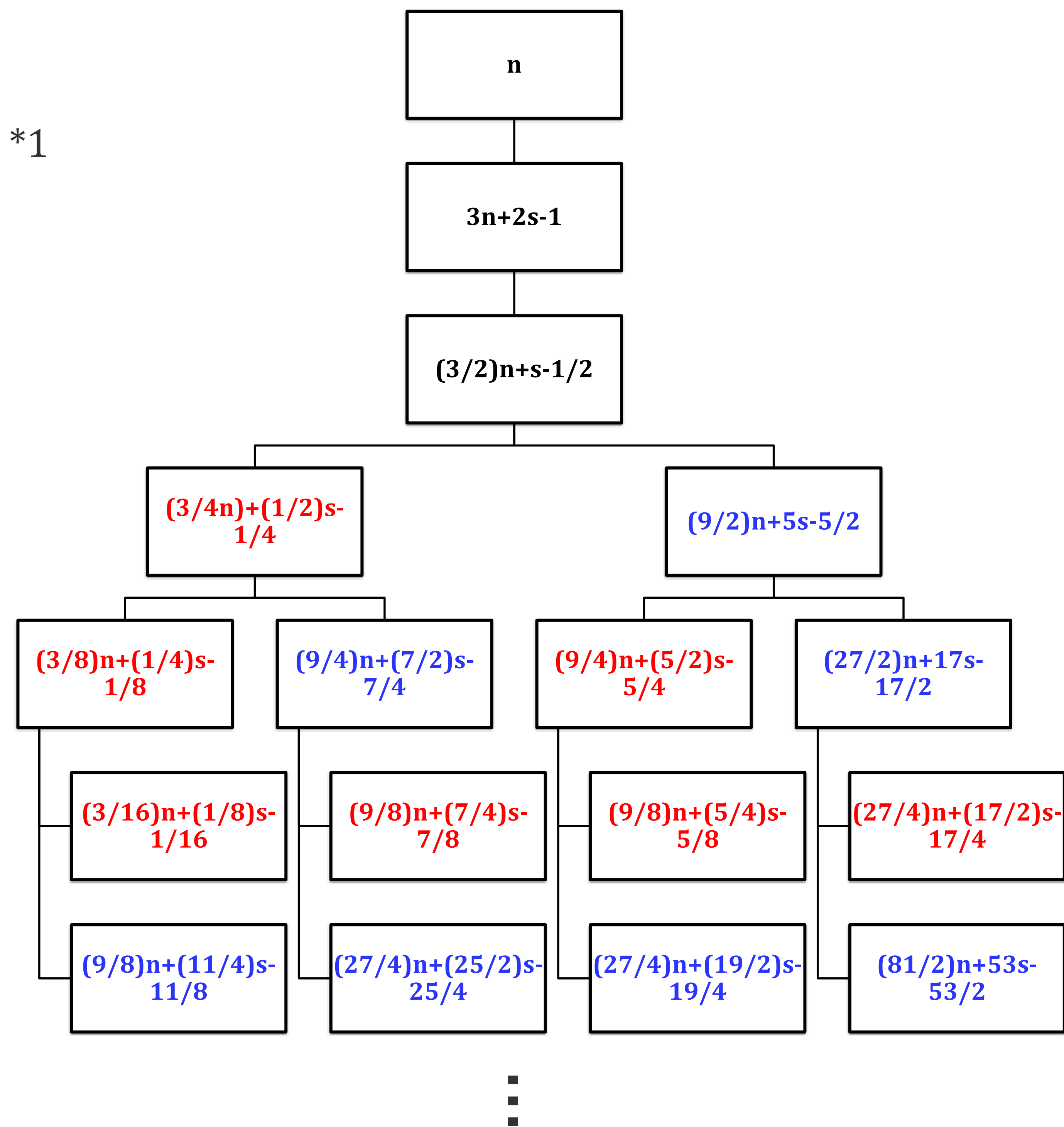
I について
 k が3の倍数なのでこれを $3m$ と置く。つまり、変えた後の計算式 $3n+k$ は
 $3n+3m=3(n+m)$ に置き換えられる。
 n と m は自然数なので $3(n+m)$ は3の倍数である。つまり、2の累乗は計算結果として表れないことを示している。よって、 k が3の倍数のときは1に到達しない。

II について
 $k=1$ の場合を考えると $3n+1$ となり、 n は自然数であるから常に n に1の倍数を代入し、1を含むループが発生する (=1に到達する) という事象が発生する。これはコラッツ予想と同一の事象である。
 $3n+1$ の場合は1に到達した後 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ というループが発生する。これは $k=1$ の場合であるから $3n+k$ については $k \rightarrow 4k \rightarrow 2k \rightarrow k$ というループが発生することとなるため、II はコラッツ予想と同様の事象であると考えられる。

III について
これは II と同様の事象がすべての数について起こっていると考えることができる。また、IV の事象とも重なっている。
ただし、なぜすべての数についてこの事象が起こるかは不明であった。

IV について
 k は奇数であるため $2s-1$ とし、 $k=2s-1 \cdot 1^*$ と $k=3(2s-1) \cdot 2^*$ の場合とを比較した結果、両方の計算結果から n の項を引いたものが $k=3(2s-1)$ の場合 $k=2s-1$ の場合の3倍になっている。

樹形図



おわりに

コラッツ予想はシンプルかつ美しい事象であるが、未だ証明されていないため不明な点も多い。
本研究でコラッツ予想に類似した現象がみられるなど新たな発見があったことは、今後の研究に期待がもてるだろう。