ヒマワリの種子の配置に現れるフィボナッチ数列の研究

研究者氏名：春日雄大郎　工藤俊介　熊谷雄介　治郎丸尚大　益子渉

1.研究の動機

1,1,2,3,5,8,13 …と隣接項の和で表されるフィボナッチ数列。
その単純さとは裏腹に、自然界で数多く登場することや黄金比と深く関係があるなど、不思議な性質を持つ。
我々はこの性質に興味を持ち、本研究に至った。

自然界に登場するフィボナッチ数の一例として
ヒマワリの種の配置について調べ、その上で
フィボナッチ数が登場する理由を考察する。

2.フィボナッチ数列とは

最初の二項は1、三項目以降はすべて直前の二項の和で表される数列。
フィボナッチ数列をF_nとおくと、次の定義式で示される。

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 1 & (n=2) \\ F_{n-1}+F_{n-2} & (n \geq 3) \end{cases}$$

またこの漸化式を解くと、次の一般項が得られる。

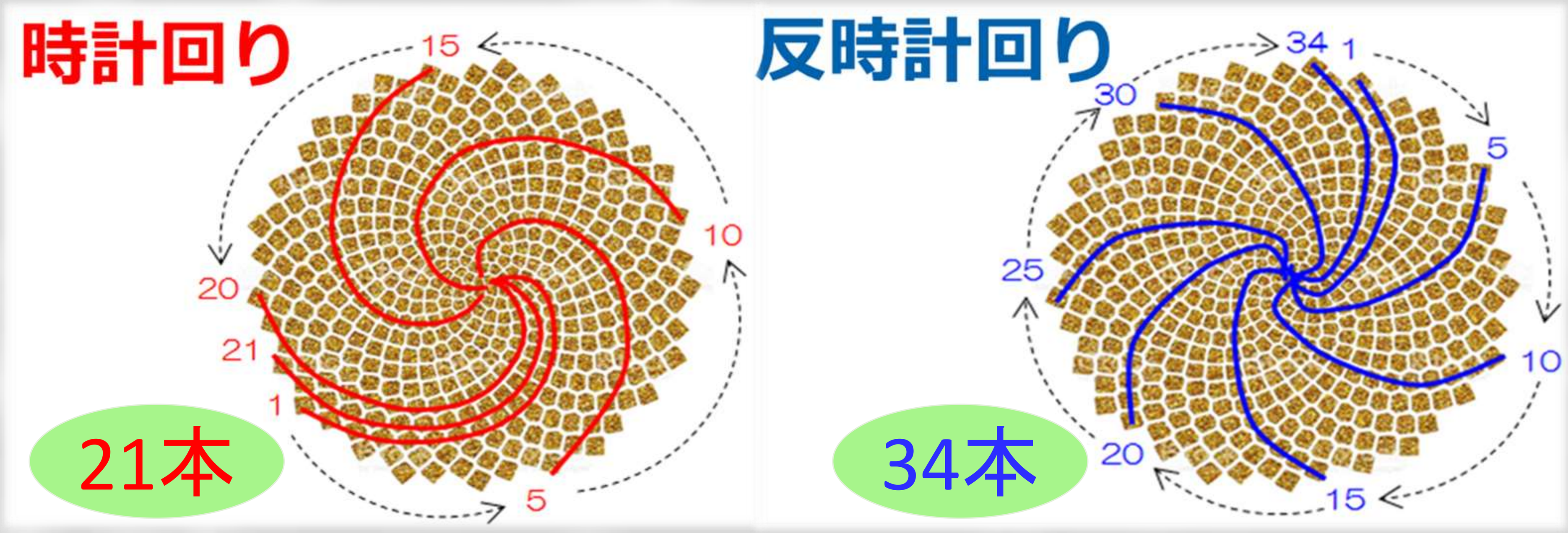
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

3.フィボナッチ数列とヒマワリ

ヒマワリの種を見ると、らせんを描くように列が観察できる。
右の種の場合は、時計回りが21本、反時計回りが34本観察できる。

一般にヒマワリの種には、

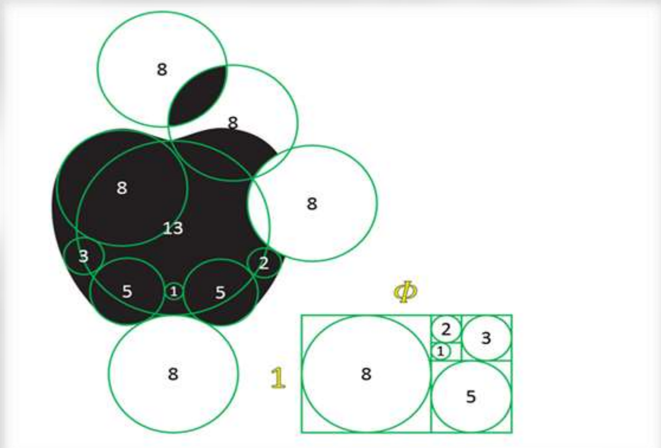
時計回りが21本、反時計回りが34本
時計回りが34本、反時計回りが55本
時計回りが55本、反時計回りが89本
の3通りしか存在しない。



4.黄金数の連分数表示と精度

黄金数とは、先ほどの三項間漸化式における特性方程式 $x^2 = x + 1$ の正の解であり、一般にΦと表記される。$\left[\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots\right]$

$1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ という比率は黄金比と呼ばれ、神秘の比率と称される。
実際、パルテノン神殿や、アップル社のロゴマークにも用いられている。



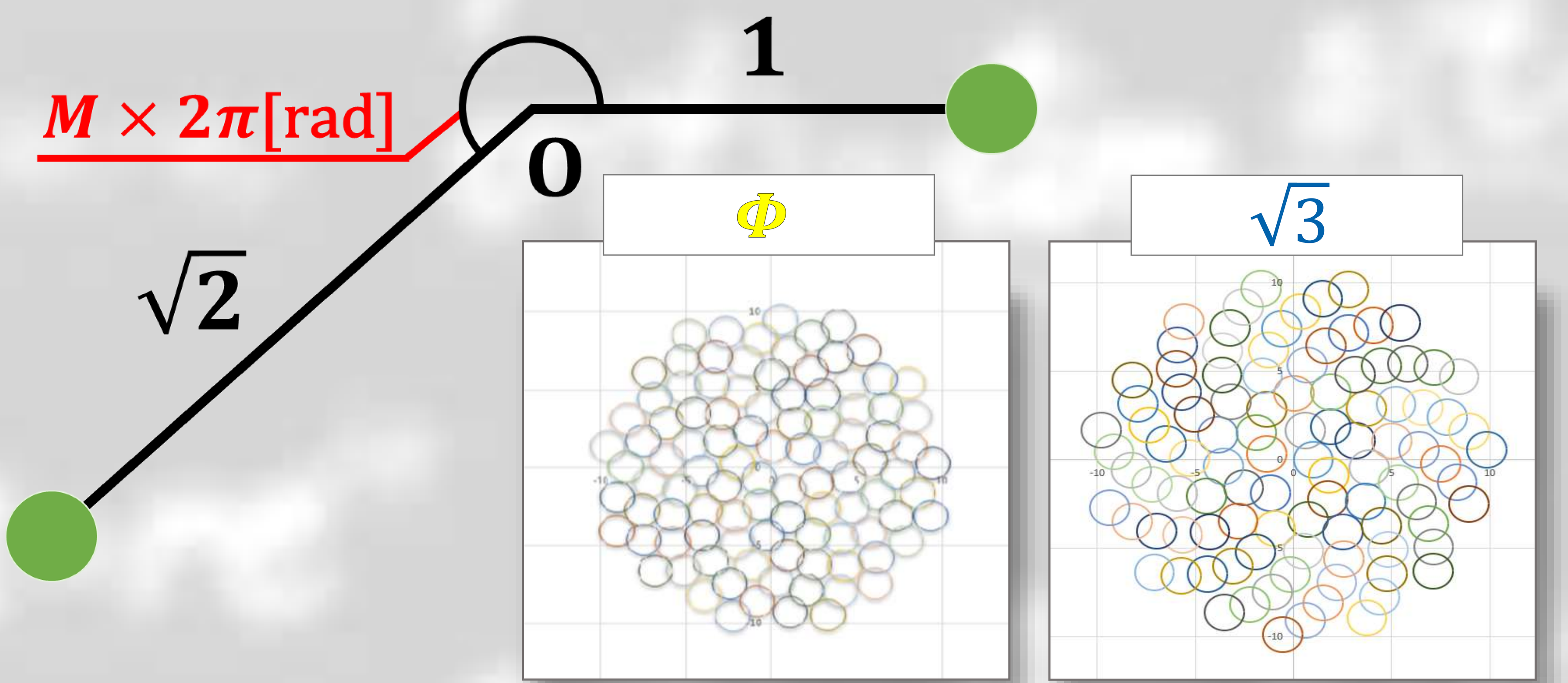
すべての無理数は、連分数表示することができる。
$\sqrt{3}$、Φの連分数は以下のように表示される。

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \qquad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

ある数の連分数展開は、大きな分母がでてくると、その手前で打ち切った時の近似分数は精度の高いものとなる。
なお、証明は複雑であるため省略させていただく。

$\sqrt{3}$、Φの近似連分数には大きな分母がでてくることはないため、比較的精度の高い近似は難しい。

5.種の配置のシミュレーション



以下の手順でヒマワリの種をコンピュータで配置していく。
①極Oから1本目のうでを右方向に伸ばし、丸い種を1個つける。
②次に、一定の角度（今回は$\sqrt{3} \times 2\pi$[rad]　および　$\Phi \times 2\pi$[rad]）だけ反時計回りに回転した方向にうでを伸ばし2個目の種をつける。
うでの長さは1本目のものより※少しだけ長くする。
③さらに先程と同じ角度だけ回転させた方向にうでを伸ばし、3個目の種をつける。うでの長さは2本目のものよりも※更に長くする。

以下、この工程を続けて種を100個配置していく。ただし、種の半径は1とする。
※うでの長さは、1本目が$\sqrt{1}$、2本目が$\sqrt{2}$、3本目が$\sqrt{3}$…というようにn本目が$\sqrt{n}$となるようにする。

種の重複面積を比較すると、$\sqrt{3}$が97.41998、Φが47.1276となる。

Φのほうが$\sqrt{3}$より効率のよい配置である。

6.まとめ

Φが植物にとって一番効率のよい配置であるため、ヒマワリの種ではこの配置となったのだろう。

1以下の有理数Mを用いて、$M \times 2\pi$[rad]を回転角とした場合、Mを分数表示した際の分母の数だけ列が見られる。
また、無理数Nで行った場合は精度のよい近似連分数の分母の数だけ列が見られる。
Φの場合、2,3,5,8といったフィボナッチ数列が近似連分数の分母にでてくるので、これらの本数だけ列が見られるはずである。
しかし、Φは連分数近似が極めて困難なため、少ない配置個数で列を見極めるのは難しい。
よって、ヒマワリでは、21,34,55,89といった、小さすぎないフィボナッチ数の本数だけ列が観察される。
また、ヒマワリの花の大きさを考慮するとこれより大きいフィボナッチ数の列を観察することはできない。

謝辞

本研究にあたり、様々なご指導を下さいました**島岡純司**先生にこの場をお借りして御礼申し上げます。

参考文献

・木村俊一 「連分数のふしぎ」
・ひまわりに隠されたフィボナッチ数列と黄金比 – ひまわりは黄金の花？ | 数学の面白いこと･役に立つことをまとめたサイト https://analytics-notty.tech/fibonacci-and-goldenratio-in- sunflower/
・石取りゲームとFibonacci数 - フィボナッチ･フリーク http://fibonacci-freak.hatenablog.com/entry/2017/07/17/150239