友愛数の性質

《研究者》　佐々木雄貴　櫻井勇輝　鈴木麻修
逸見榛一　夏目宗汰　吉田匡孝
《指導教諭》　永島　侃先生

1　研究の動機

数学の未解決問題の一つに３個組の社交数がある。社交数は友愛数を発展させたものであるから、この問題の解決を試みるために友愛数の性質について研究することが有効な手がかりとなると考え、この研究を始めた。

2　研究内容

研究で扱った友愛数とオイラーの関係式について説明する。
以降、nを自然数として、nの全ての約数の総和をσ(n)、nと互いに素なものの個数をϕ(n)と定める。

2－1　友愛数の定義

異なる２つの自然数 M, Nについて、

$$\sigma(M)-\mathrm{M}=\mathrm{N}\ \text{かつ}\ \sigma(N)-\mathrm{N}=\mathrm{M}$$

が成り立つとき、２数M, Nは友愛数である。

例）(220,284)

$220=2^2\times5\times11$

$284=2^2\times71$　より、

$\sigma(220)-220=(1+2+2^2)(1+5)(1+11)-220$
$=504-220$
$=284$

$\sigma(284)-284=(1+2+2^2)(1+71)-284$
$=504-284$
$=220$

となるので、220と284は友愛数である。

2－2－1　オイラーの関係式

オイラーの関係式は条件を満たす数を探すことで友愛数を求めることができる式である。

正の整数m, nが$1\leqq \mathrm{m}\leqq \mathrm{n}-1$を満たすとすると、

$$p=2^m(2^{n-m}+1)-1$$
$$q=2^n(2^{n-m}+1)-1$$
$$r=2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2-1$$

においてp,q,rがすべて素数ならば、2^npqと2^nrは友愛数

2－2－2　オイラーの関係式の証明

この関係式の証明は文献に見つからなかったため自分たちで証明した。以下に示す。

$\sigma(2^npq)-2^npq=2^nr$　かつ　$\sigma(2^nr)-2^nr=2^npq$

すなわち、$\sigma(2^npq)=\sigma(2^nr)=2^npq+2^nr$ を示せばよい。

よって、$\sigma(2^npq)=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+p)(1+q)$
$=2^{n+m}(2^{n+1}-1)(2^{n-m}+1)^2$

$\sigma(2^nr)=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+r)$
$=2^{n+m}(2^{n+1}-1)(2^{n-m}+1)^2$

また、$2^npq=2^n\{2^m(2^{n-m}+1)-1\}\{2^n(2^{n-m}+1)-1\}$,
$2^nr=2^n\{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2-1\}$　であるから、
2^npq+2^nr
$=2^n\left[\{2^m(2^{n-m}+1)-1\}\{2^n(2^{n-m}+1)-1\}+\{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2-1\}\right]$
$=2^{n+m}(2^{n+1}-1)(2^{n-m}+1)^2$

以上より、$\sigma(2^npq)=\sigma(2^nr)=2^npq+2^nr$であるため、
$\mathbf{2^npq}$と$\mathbf{2^nr}$は友愛数の組となる。

3　研究成果

クッラの関係式、オイラーの関係式をはじめ、様々なアプローチで友愛数を調べ、いくつかの性質を発見した。

3－1　友愛数とϕ関数の関係

友愛数の組**(M,N)(M＜N)**が**オイラーの関係式**を満たす

$$\Longrightarrow \phi(M)+\phi(N)=\mathrm{M}$$

3－2　友愛数と完全数の関係

偶数の完全数とオイラーの関係式を満たす友愛数組の和には、以下の関係があることが分かった。

m, nは、正の整数で、$1\leqq \mathrm{m}\leqq \mathrm{n}-1$, Sをこの友愛数の和とすると、

$$\frac{S}{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2}=\text{素数}\iff\frac{S}{2^m(2^{n-m}+1)^2}=\text{完全数}$$

例）オイラーの関係式を満たす友愛数組４組について、

①（220,284）和：504
　このとき、n＝2であるから、$\frac{S}{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2}=2^{n+1}-1=2^3-1=7$
　7は素数であるから条件を満たし、$\frac{504}{9\times2}=28$ (完全数)

②（17296,18416）和：35712
　このとき、n＝4であるから、$\frac{S}{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2}=2^{n+1}-1=2^5-1=31$
　31は素数であるから条件を満たし、$\frac{35712}{9\times2^3}=496$ (完全数)

③（9363584,9437056）和：18800640
　このとき、n＝7であるから、$\frac{S}{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2}=2^{n+1}-1=255$
　255は素数でないから条件を満たさず、$\frac{18800640}{9\times2^6}=32640$ (完全数でない)

④（2172649216,2181168896）和：4353818112
　このとき、n＝40であるから
　$\frac{S}{2^{n+m}(2^{n-m}+1)^2}=2^{n+1}-1=1099511627775$
　1099511627775は素数でないから条件を満たさず、
　$\frac{4353818112}{9\times2^{39}}=\frac{7\times43^2\times73}{2^{30}}$　(完全数でない)

3－3　友愛数和と剰余の関係

小さいほうから7642個の友愛数組をVisual Basic（以下VB）を用いて計算し、友愛数和の剰余を考えた。

13組の友愛数和だけが3で割り切れず、剰余がすべて2であった。また、このような友愛数組では、素因数2を除き、自然数nを用いて、$6\mathrm{n}+1$の形であらわせた。
なおこれらの13組はオイラーの関係式を満たさない。
3で割り切れない13組は以下のとおりである。

M	Mの素因数分解	N	Nの素因数分解	友愛和	mod 3
666030256=	2・2・2・2・19・331・6619	696630544=	2・2・2・2・199・331・661	1362660800	2
4150593232=	2・2・2・2・43・61・98899	4213181968=	2・2・2・2・43・859・7129	8363775200	2
4796703664=	2・2・2・2・43・67・104059	4855069456=	2・2・2・2・43・373・18919	9651773120	2
33707179456=	2・2・2・2・2・2・163・271・11923	33844856128=	2・2・2・2・2・2・271・541・3607	67552035584	2
53151801712=	2・2・2・2・19・6451・27103	55270703248=	2・2・2・2・109・307・103231	108422504960	2
62393407792=	2・2・2・2・19・307・668539	65270990608=	2・2・2・2・139・439・66853	127664398400	2
107122129216=	2・2・2・2・2・2・103・3343・4861	107620508608=	2・2・2・2・2・2・271・571・10867	214742637824	2
284624443948=	2・2・13・19・103・367・7621	122890970880=	2・2・13・31・73・103・23689	571750000640	2
413732656012=	2・2・13・19・37・79・143263	439891561588=	2・2・19・37・43・439・8387	853624217600	2
428886470464=	2・2・2・2・2・2・139・991・48649	429190553536=	2・2・2・2・2・2・139・4339・11119	858077024000	2
596748205168=	2・2・2・2・19・31723・61879	620362089232=	2・2・2・2・97・439・910519	1217110294400	2
692294720704=	2・2・2・2・2・2・103・6271・16747	695119246144=	2・2・2・2・2・2・181・4423・13567	1387413966848	2
702191247424=	2・2・2・2・2・2・109・523・192463	706699122496=	2・2・2・2・2・2・367・523・57529	1408890369920	2

3－4　新しい関係式の考察

小さいほうから数えて7642組の友愛数のうち、オイラーの関係式を満たすものは4組しかなく、汎用性がない。そこで、新たな友愛数の関係式をつくろうと考えた。しかし、でたらめに式をつくっても、それが友愛数になる確率は極めて低い。そこで、7642組の友愛数組を、VBを用いて、素因数分解し、そこから形を予測して式をつくれないかと考えた。

例）偶数と奇数の友愛数を求めるための式を作る。ここでは、7642個の友愛数組を 素因数分解して、素因数3をもつ奇数友愛数組が多いことから、
$x\geqq2, y\geqq3$の素数に対し、2^nxと3^nyを考える。

$$\sigma(2^nx)=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times(x+1)=(2^{n+1}-1)(x+1)$$
$$\sigma(3^ny)=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\times(y+1)=\frac{3^{n+1}-1}{2}\times(y+1)$$

2^nxと3^nyが友愛数となるとき、定義から、

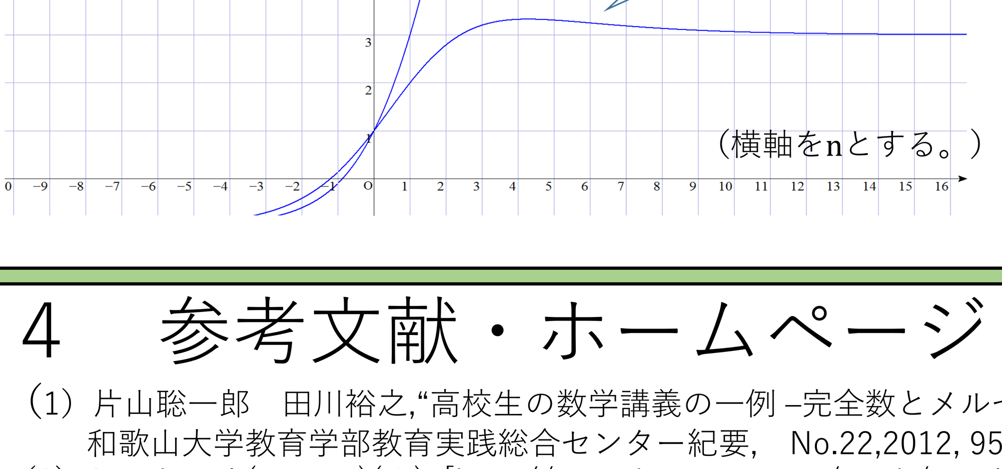
$(2^{n+1}-1)\times(x+1)=\frac{3^{n+1}-1}{2}\times(y+1)$

$(2^{n+1}-1)\times(x+1)=2^nx+3^ny$　　が成立。

これを解くと、

$$x=\frac{3^n\times2^{n+1}-2\times3^n+3^{2n+1}-2^{n+1}+1}{2^n\times3^n+2^n+3^n-1}$$

$$y=\frac{(2^{n+2}-3^{n+1}-1)(2^n\times3^n+2^n+3^n-1)+2(2^{n+1}-1)(3^n\times2^{n+1}-2\times3^n+3^{2n+1}-2^{n+1}+1)}{(3^{n+1}-1)(2^n\times3^n+2^n+3^n-1)}$$



グラフより、n=1のとき、x＝3, y＝2のとなるが、友愛数組はともに６となってしまうので不適。
また、yは、n→∞のとき、y→3+0であり、
2^nxと3^nyを満たす友愛数組はない。

4　参考文献・ホームページ

(1) 片山聡一郎　田川裕之,“高校生の数学講義の一例 –完全数とメルセンヌ素数-,” 和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要,　No.22,2012, 95-99ページ.
(2) Amichevoli(numeri)(Ⅰ), [http://www.bitman.name/math/article/59])
(3) l'elenco delle coppie di numeri amichevoli, [http://www.bitman.name/media/pdf/upload/tables/amichevoli_1_3.txt]
(4) Elvin Lee,“On Divisibility By Nine of the Sums of Even Amicable Pairs,” Mathmatics of Computation,Vol.23,No.107,1969,pp.545-548.
(5) 倪永茂,“オイラーのϕ関数およびその逆関数の計算,” 宇都宮大学国際学部研究論集, No.30, 2010, 59-64ページ.
(6) 上垣渉　何森仁『数とその歴史５３話』（三省堂、1996年）76-91ページ
(7) Euler'sRule,[Mathworld.wolfram.com]