ロジスティック写像による擬似乱数生成と評価

数学1班
小原友晴
春日孝太
傳田智宏
宮下和也

指導教諭
永島　侃先生

1、ロジスティック写像とは

ロジスティック写像とは、定数 a を用いた漸化式

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$$

で示され、

$a=1, x_1=0.5$とすると、$x_2=0.25$,

$x_3=0.1875$といったように値が変化していく。

2、乱数とは

乱数とは、全く無秩序に、しかも出現の確率が同じになるように並べられた数字の列のことを言う。

本研究では、擬似乱数を作るだけでなく、評価もしていくため、良い乱数とはどのようなものかを考えた結果、数字の出方に偏りがなく、かつ、その先の数字が予測できないものと定義した。

3、乱数の評価方法

今回の研究では、擬似乱数の評価の基準は、

① **各数字の出現確率**
② **ある値の次にくる数の相関関係**
③ **観測されたデータの分布はどのくらい理論値と同じとみなせるか**

と決定し、擬似乱数を評価していく。

4、擬似乱数の生成

十分の一、百分の一、千分の一の位をそれぞれ a、b、c とし、

[1]百分の一の位　b
[2]千分の一の位　c
[3]$(a+b+c)$の一の位$a+b+c$
[4]$(a-b-c)$の絶対値の一の位 $|a-b-c|$
[5]十分の一の位　a

の値を用いる5つの方法で疑似乱数を生成、評価する。

5、評価、考察

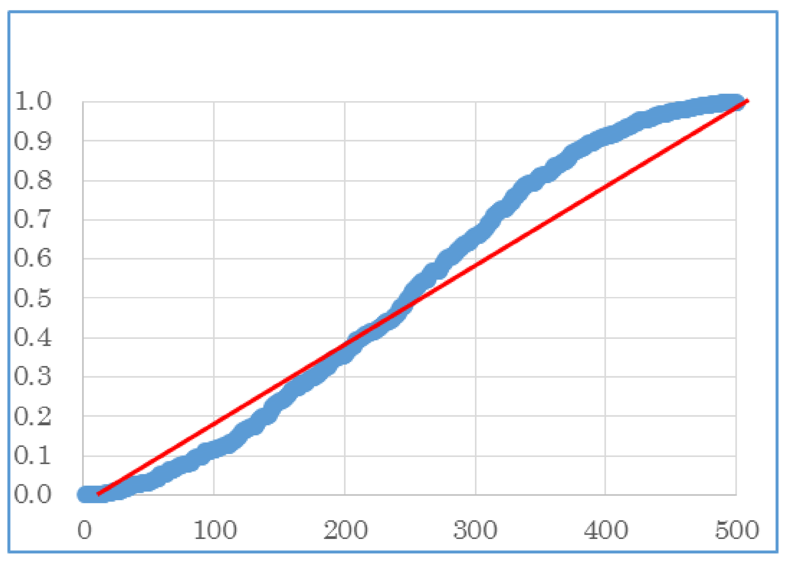
生成の結果、思っていたより多く評価方法③を満たさない擬似乱数が存在し、特に、[4]では1つも満たさなかった。

それぞれの生成方法で最も良いと考えられる擬似乱数は、[1]が$x_1=0.625$のとき、[2]が$x_1=0.875$のとき、[3]が、$x_1=0.375$のときであった。

6、十分の一の位を利用した擬似乱数生成

十分の一の位に0や9が多く見られてしまうというロジスティック写像の特徴について、どのように数の取り方を工夫すれば各数字の度数を均一にできるかを考えた。

散布図（左図の太線）は$x_1=0.675$としてx_{500}まで計算し、それらの値を昇順に並べなおしたものである。（縦軸は x_{n+1}、横軸は



n 番目を表している。）この曲線を、$y=\frac{1}{500}x$の直線（左図の細線）に近づけると十分の一の位の値に偏りが出ないと考え、二つの方法を考えた。

7、生成①

一つ目の方法は、$y=\frac{1}{500}x$の直線に近づけるために6の散布図のそれぞれの値にある値を足す、または引く方法である。そのために、$y=\sin x$ を用いた。検証の結果、$x_n+0.08\times\sin\{\frac{7}{10}(x_n+0.2)\pi\}$のとき最も良くなった。

	評価方法①	評価方法②	評価方法③
平均	6.879167	―	21.80

評価方法③の平均は、基準となる16.919を超えていたが、[5] の表（論文参照）と比べると、数字はかなり小さくなっていることが分かる。

8、生成②

二つ目の方法は、6の散布図のそれぞれの値に、ある数をかけて $y=\frac{1}{500}x$ の直線に近づけるという方法である。検証の結果、取り出し方としては,a,b, c を定数として、$\frac{(x_n-c)(\mathrm{a}-|\sin 2\pi x_n|)}{b}+c$ の十分の一の位の値を取り出すというものになり、a=4.4,b=5,c=0.48を使用して、取り出し方を$(x_n-0.48)\{\frac{(4.4-|\sin 2\pi x_n|)}{5}\}+0.48$を計算し、その十分の一の位の数を取り出すというものにした。

	評価方法①	評価方法②	評価方法③
平均	5.808	―	12.29

評価方法①、評価方法③ともに、生成①よりも良い値になり、より良い擬似乱数を生成することができた。

9、他の方法での生成との比較

ロジスティック写像を用いた擬似乱数の評価と比較するため、他の関数としてExcelのrand関数を用いて、4で生成した方法と同じ5つの方法で疑似乱数を生成し、評価を行った。

生成の結果、生成②で生成した乱数とほぼ同じ評価が得られた。しかし、rand関数は時間によって結果が大きく変わるのに対して、ロジスティック写像は、初期値を変えることによって安定して良い擬似乱数を作ることができるということが利点である。

10、結論

評価方法①、②、③を踏まえて、本研究でもっとも良かった擬似乱数は、生成②で生成した擬似乱数の、初期値 x_1=0.81 のときとした。

	評価方法①	評価方法②	評価方法③
平均	2.8	0.014791	2.80

参考文献・ホームページ

脇本　和昌『乱数の知識』(森北出版株式会社,1970年)36-60ページ
東京大学教養学部統計学教室『統計学入門(基礎統計学)』(東京大学出版会,1991年)245-250ページ
長崎県立大学　伊藤研究室　[http://sun.ac.jp/prof/ito/]
ようこそ、化学標準物質の不確かさへのいざない[https://staff.aist.go.jp/t.ihara/chi2.html]
BDA style [http://bdastyle.net/tools/probability-distribution/page3.html]
PRESIDENT Online[http://president.jp/articles/-/12406]