

二人零和有限確定完全情報ゲーム

長野県伊那北高校理数科2年

研究者 北原秀悟 金井脩吾 保科裕哉 松本峻

指導教諭 有賀智秀

研究動機

数学的ゲームの必勝法を自分たちの力で、探し出そうというのが当初の目的であった。二人零和有限確定完全情報ゲームというジャンルを見つけ、調べてみると運が介在しないという点で、非常に面白いものであった。我々はこのゲームの必勝法を探し出すということを研究テーマにした。

研究目的

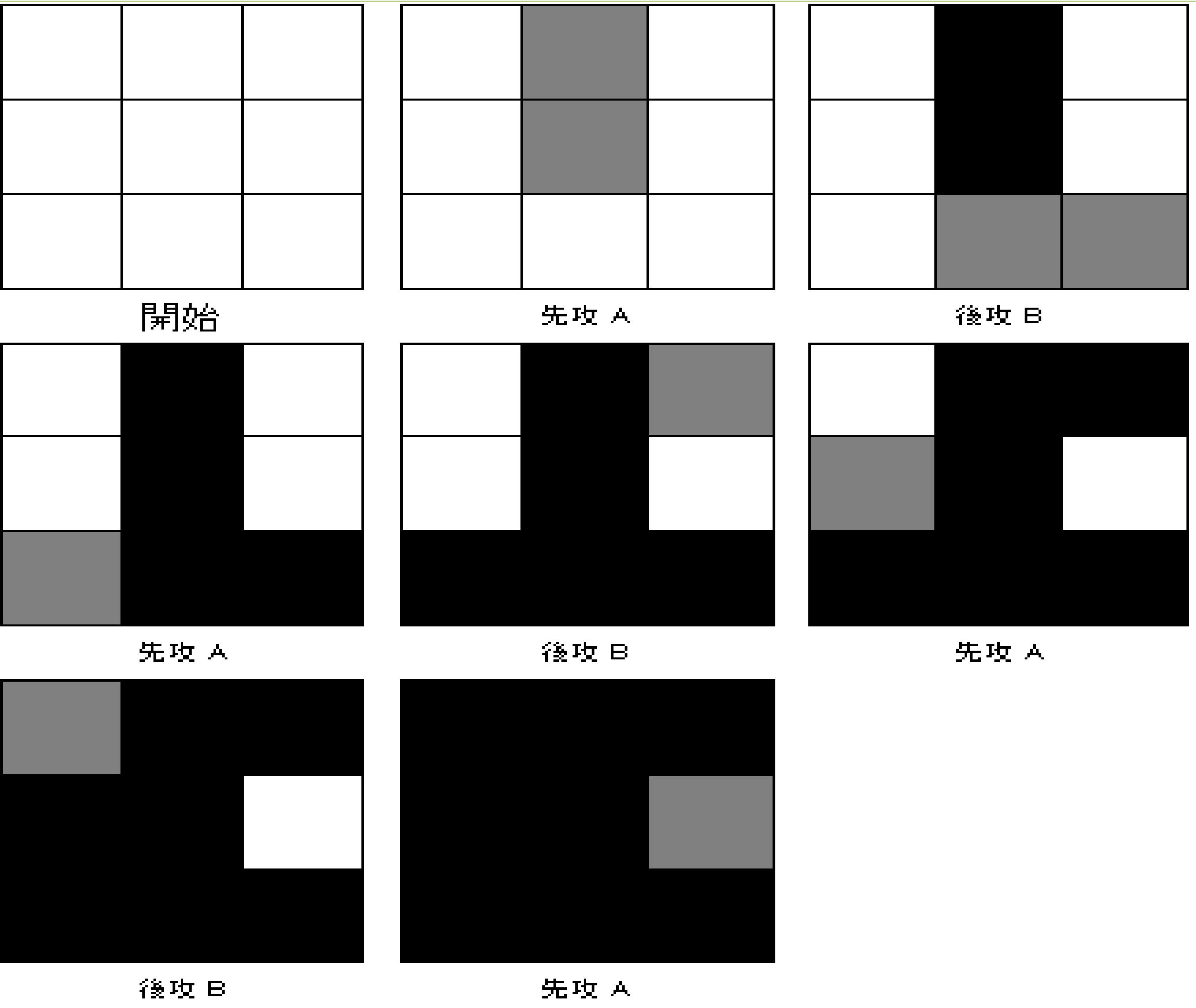
$N \times N$ で表される場において最後のマスに駒を置いたら、勝ちというLAST PIECEについての必勝法の発見。

LAST PIECE

LAST PIECEとは、マス目のあるゲーム盤で行い、各プレイヤーがそのマス目を、2種類の四角片を用いて埋めていき、最後のマスを埋めた方のプレイヤーの勝利というゲームである。

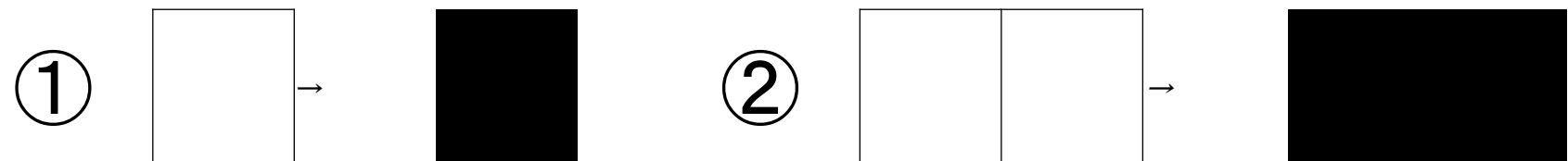
例示

ここでは、 3×3 のゲーム盤で行うものを取り上げる。
プレイヤーAが手駒を用いて埋めた場所を右行、プレイヤーBが手駒を用いて埋めた場所を左行にて表記する。なお、新たに埋めたマス目の部分は灰色で表記することとする。今回使用する駒は 1×1 , 1×2 の駒(四角片)である。
なお、駒の最大で埋めることのできるマス数をMFP:max fill possibilityと称することとする。

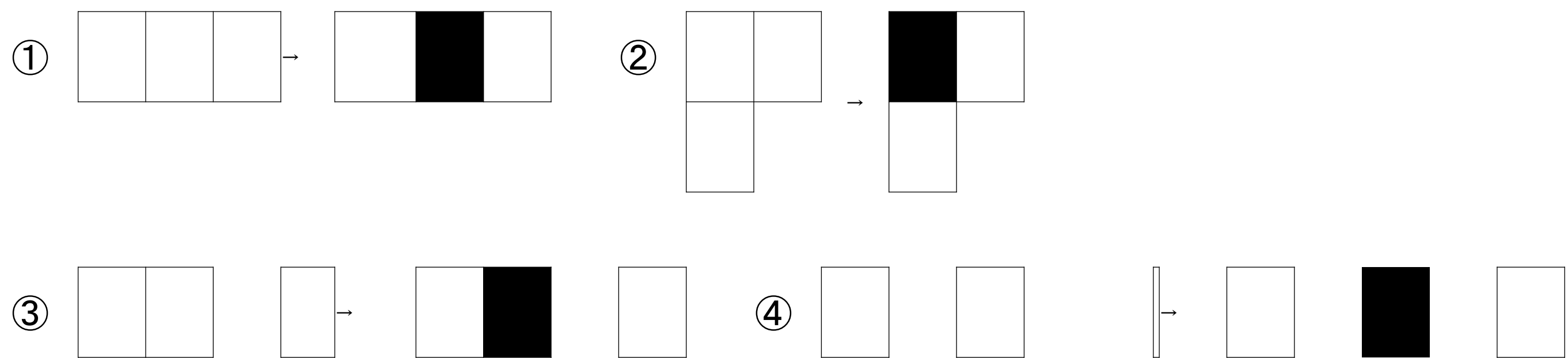


LASTPIECEの必勝法の考察

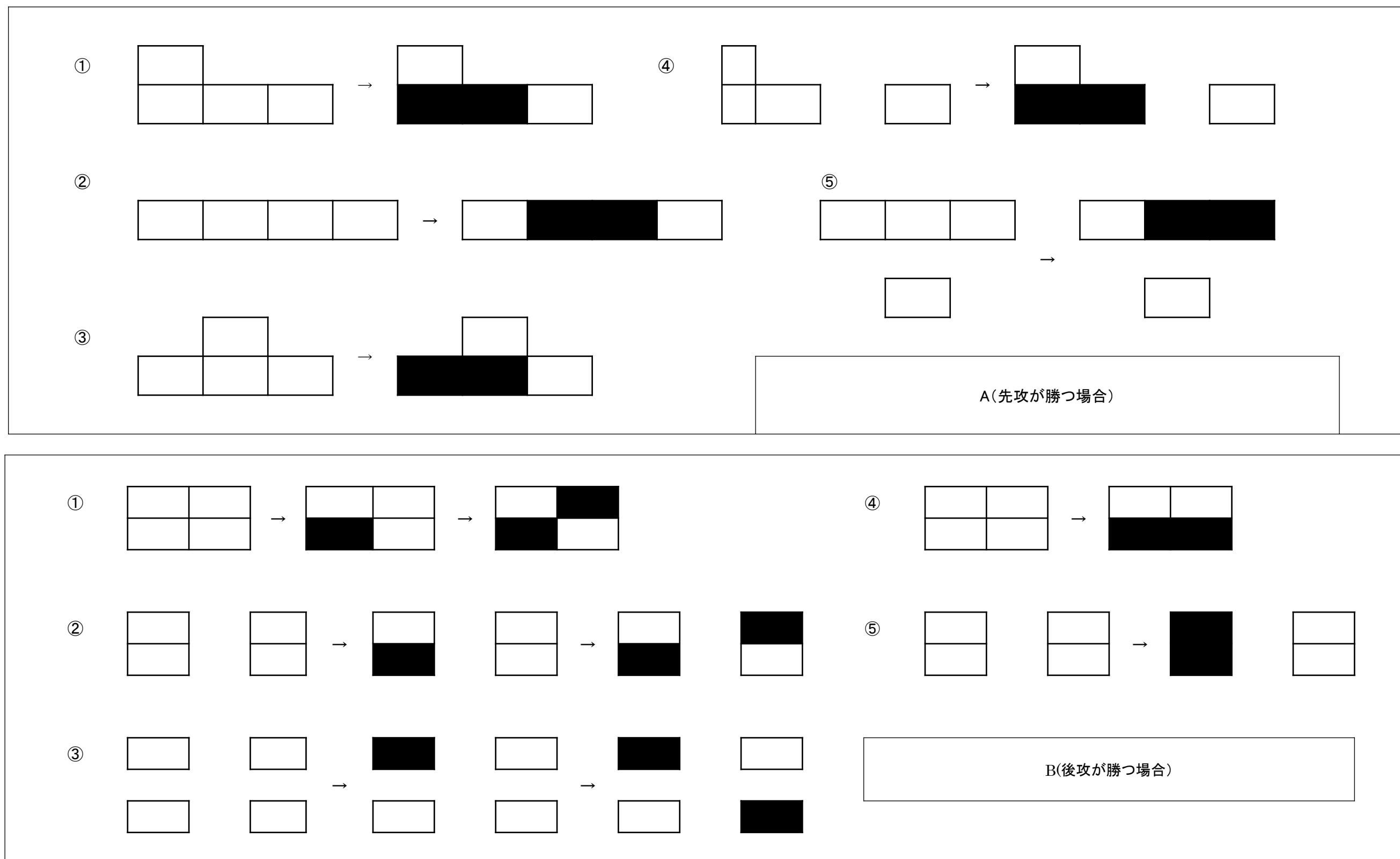
LASTPIECEにおける、残りマス数をSSと表記する。
今回使用する駒は 1×1 , 2×1 とする。(使用する駒は回転可能で、何度でも使用することが可能。)
自分の番にて、SS=1のとき(①)、連続するSS=2のとき(②)、必ずそのマスを埋めることができる。



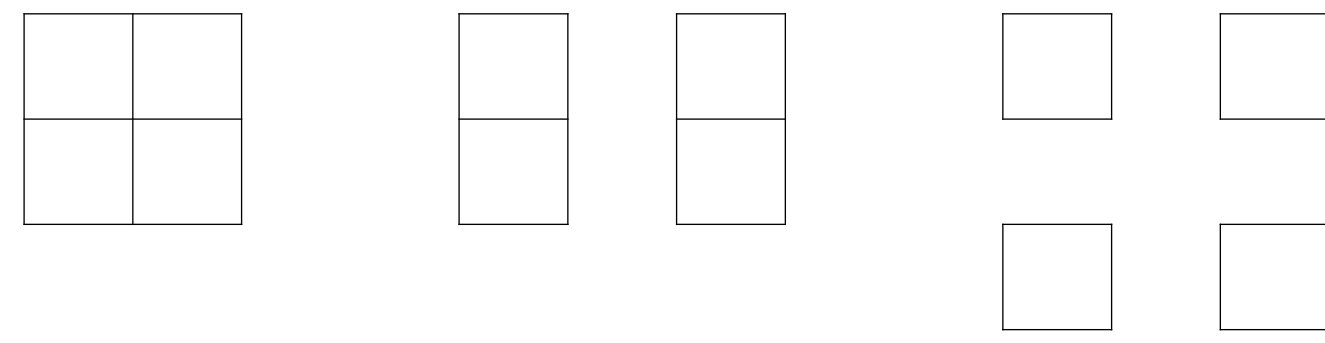
SS=3のとき、1マスが2つ残る状態(離れて存在)で相手に回せばよい。すると、相手は残りの2マスを埋めることはできないので、自分はSS=1の状態で回され、勝利することができる。これはSS=3で自分の手番の時には必ず行うことができる。



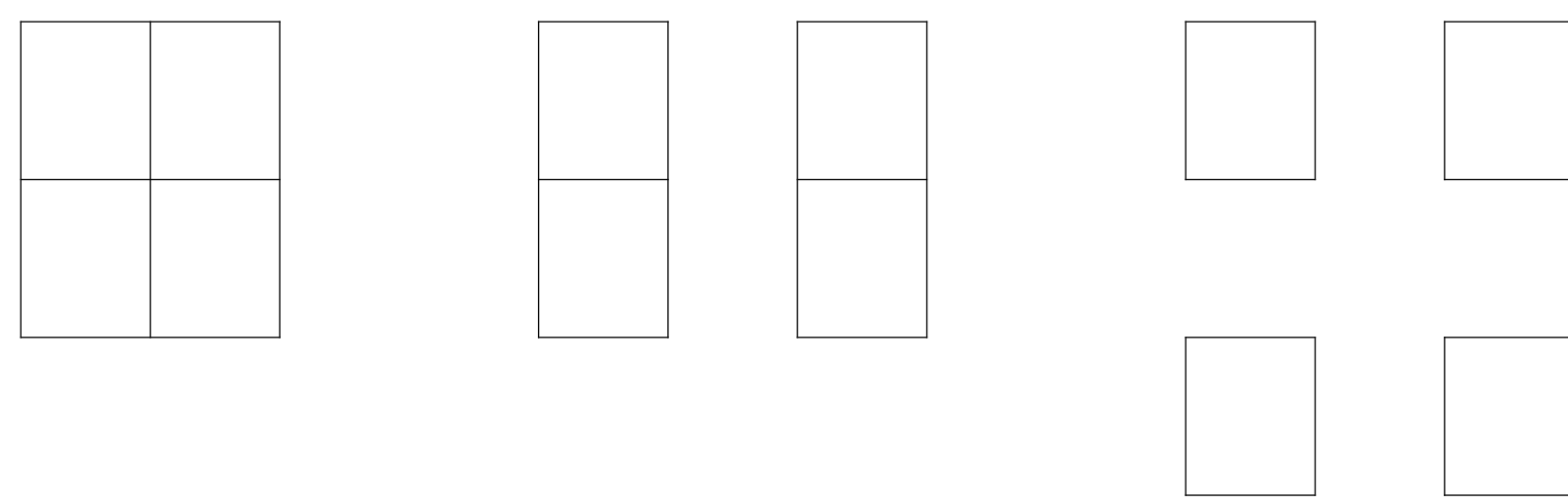
SS=4のとき、以下の図の場合が考えられ、左では先攻(A)の勝利、右では後攻(B)の勝利である。



SS=5のとき、自分が2マス埋めた場合、相手の手番にてSS=3になるので、必ず自分がまけてしまう。よって自分は1マス埋めなければならない、このとき、相手に回す型は以下のようにでなければならない。



これらの型は、前の記述からもわかるように、この型で回した側の必勝である。
以上から考えると、先手A(ここでは自分と称する)が勝つには、SS=4の場合に点対象となる図形で相手にわたせばよい。つまり、以下のような図形である。



このような図形で相手に返すには、相手の打った点に点対象となるように打っていけばよいのではないかと考えた。

相手の打った場所の点対象になるように打つとき、相手の打った場所の点対象になるように打つためには、自然数mを用いて、 $N=2m$ のとき後攻、 $N=2m-1$ のとき先攻であれば、相手の打った場所に点対象となるように打つことができる。なぜなら、偶数×偶数のときは明らかで、奇数×奇数の場合、先手で中心に打てば、その後は相手の打った場所の対称点に打つことができるからである。
相手の対称点に打っていったとき、各プレイヤーの持ち駒は1マスまたは、2マスであり、対象に打っていくことから、相手と自分の手番での駒を打った数の和は偶数である。よって相手の打つ手番において、SSは偶数である。
よって、SSが4つになるときを考えると、これは11枚目のスライドに示された図形しかあらわれないということである。また、SSが2つのときを考えると、これはSS=1が2つ残っている場合でしかあらわれない。
また、以上の図形は、相手の手番でしか現れない。これは、相手の点対象な点にうつことから、明らかである。
よって、相手の対象な点に打つことで勝利することができる。

まとめ

今回紹介したLAST PIECEは、任意の数が場にある状態から、何個か置いていたり、とっていたりして最後の数をとったとき勝敗がきまるというものであった。最も簡略化された型に持っていくことができれば勝利である。

感想

研究したゲームにおいて、最初は必勝法を探すのは難題なものと思われた。しかしながら、具体的な数字を代入したり、的確な場合に分けたりして、地道に考えた結果、ある程度までの結論に辿り着くことができて、大変貴重な経験となった。このことを、日常生活の中でも活かしていきたいと思う。また今後さらに別のゲームについて、必勝法を探すなどのアプローチをしていきたい。