

(I) 問1 (ア) 基本的には、立体 B を頭の中に描き、その周りをゆっくりと眺めて見える面の個数を数えることができればよい。

以下は、解答を書きやすくするために各段ごとの表面積を組にした。実際には、手前・右・左・奥の各側面に注目して何段までが見えるかで数えるのが結構早い。

ここでは、上面、2段目側面、1段目側面の面の個数(面積)を

(上面, 2段, 1段)

で表すことにし、高さが3段まで、4段までまでのときも、これに準じた書き方をする。

(上面, 2段, 1段) = (4, 6, 8) であるから

$$S = 4 + 6 + 8 = 18 \text{ cm}^2$$

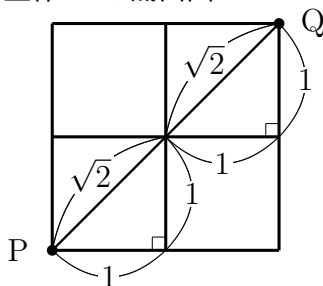
である。

問題図(参照)

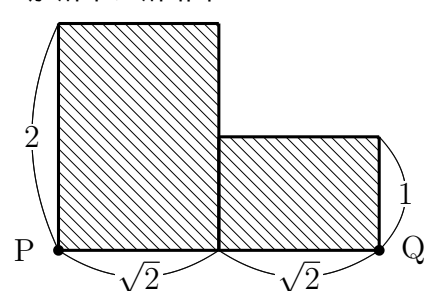
2	1
2	1

(イ) 底面図と断面図を並べておく。

立体 B の底面図



切断面の断面図



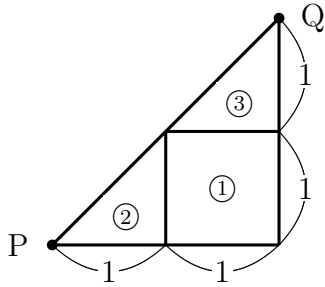
であるから

$$T = \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

である。

(ウ) 立体 G の底面図は次のようになる。

立体 G の底面図



これより, ①, ②, ③ の面積を同じ ①, ②, ③ で表すことにすると,

①, ②, ③ の面積は

$$\text{①} = 1 \text{ cm}^2, \quad \text{②} = \text{③} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

である。

これより

$$V = \text{①} \times 1 + \text{②} \times 2 + \text{③} \times 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^3$$

である。

問 2 (ア) 問 1 と同様に考える。

(上面, 4 段, 3 段, 2 段, 1 段) = (9, 8, 14, 16, 12) であるから

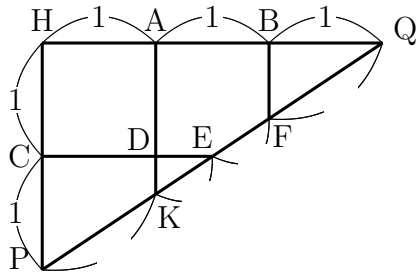
$$S = 9 + 8 + 14 + 16 + 12 = 59 \text{ cm}^2$$

である。

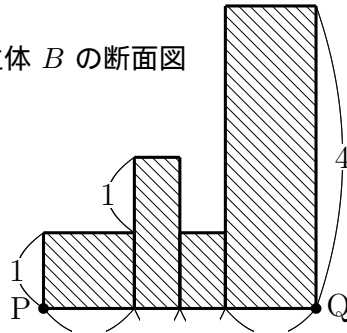
問題図 (参照)

3	1	4
1	2	3
2	4	1

(イ) 底面図と断面図をかく。



立体 B の断面図



ここで、下の計算の通り $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\frac{\sqrt{13}}{6}$ である。

相似な三角形に注目して ((ウ) の体積 V を求める過程を参照)

$= \frac{1}{2} \times$ を得る。

また、直角三角形 PQH で「三平方の定理」を用いて

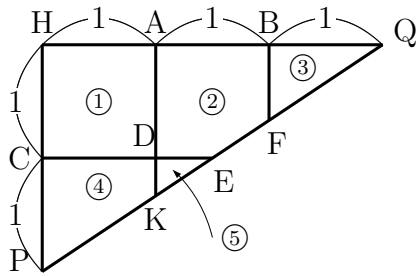
$$3^2 + 2^2 = PQ^2 \quad \text{これより} \quad PQ^2 = 13 \quad PQ > 0 \quad \text{より} \quad PQ = \sqrt{13}$$

である。よって、 $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\frac{\sqrt{13}}{6}$ であるから

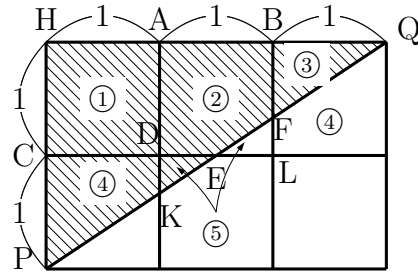
$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{13}}{3} \times 1 + \frac{\sqrt{13}}{6} \times 2 + \frac{\sqrt{13}}{6} \times 1 + \frac{\sqrt{13}}{3} \times 4 \\ &= \frac{\sqrt{13}}{3} \times 1 + \frac{\sqrt{13}}{6} \times 2 + \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{\sqrt{13}}{3} \times 4 \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{6} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

である。

(ウ) 立体 G の底面図は次のようになる。



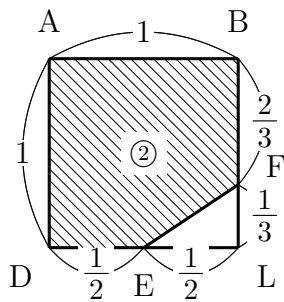
立体 G の底面図



$\triangle QBF \sim \triangle QHP$ で、相似比が $QB : QH = 1 : 3$ であるから

$$BF = PH \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

また、 $\triangle PCE \sim \triangle PHQ$ で、相似比が $PC : PH = 1 : 2$ であるから、 $CE = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ で、 $DE = \frac{1}{2}$ である。



$$\textcircled{1} = 1 \times 1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{2} = \text{正方形 ADLB} - \text{三角形 ELF}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{12} \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{3} = \frac{1}{2} \times BF \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \times 1 = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ cm}^2$$

これより

$$\begin{aligned} V &= \textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times 1 + \textcircled{3} \times 4 + \textcircled{4} \times 1 + \textcircled{5} \times 2 \\ &= 1 \times 3 + \frac{11}{12} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{12} \times 2 = \frac{73}{12} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

である。

(I) 問 1, 問 2 とともに, (イ) の断面図と (ウ) の底面図はそれぞれ切断面の面積 T と立体 G の体積 V を求めるための補助的な役割をしています。評価基準もそれに準じた程度のものとなります。

(II) 列の和が 6 になるのは, 数字 1, 2, 3 を並び換えた組と, 数字 2, 2, 2 の並びの組だけであることに注目すると考えやすいでしょう。

(II) 問 5 は, 数字 2 の個数・配置が違う場合があることに注目して, 2 が「L 字」「T 字」「十字」の場合に, それぞれ 1 と 3 の位置を入れ替えても表面積が変わらないことがわかります。また「すべて 2」の場合は表面積がすぐ求められます。「数字 1, 2, 3 が同数ずつ含まれる」場合は, 数字 3 が単独で 3 ヶ所にあるので, 3 段目の $4 \times 3 = 12\text{cm}^2$ をまず数える, そして数字 3 を 2 に置き換えて見ると, 数字 1 の配置から, このタイプはすべて表面積が同じことがわかります。これらに注目すると S の種類は最大で 5 種類であるので, それらの代表を選び表面積を調べるとよいでしょう。

(I), (II) を通して, 問題を正しく理解するためには「平面図形の対称性」「空間における 2 平面の位置関係」「立体の表面積」「平行と合同」「場合の数」「平方根」「2 次方程式の解」「図形の相似」「平行線と線分の比」「三平方の定理」など, さまざまな知識を必要します。

(II) 問 1 A が 1 のとき , 次の 8 通りある。

- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
- ①
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |
- ②
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
- ③
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
- ④
-
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |
- ⑤
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
- ⑥
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
- ⑦
- | | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |
- ⑧

問 2 A が 2 のとき , 次の 15 通りである。

- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
- ⑨
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
- ⑩
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
- ⑪
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |
- ⑫
-
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
- ⑬
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 |
- ⑭
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
- ⑮
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
- ⑯
-
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |
- ⑰
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |
- ⑱
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
- ⑲
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
- ⑳
-
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |
- ㉑
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
- ㉒
- | | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
- ㉓

問 3 A が 3 のとき , 次の 8 通りである。

- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
- ⑳
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
- ㉑
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
- ㉒
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |
- ㉓
-
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 |
- ㉔
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
- ㉕
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |
- ㉖
- | | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
- ㉗

問 4 問 1 ~ 問 3 より , $8 + 15 + 8 = 31$ 通り

数字 2 のマス^ぬを色鉛筆で塗っててください。

問 5 考え方は, (1)~(3) で求めたすべての場合について, S の値を求ようとしてみることである。その際, 9 つの場所に 1, 2, 3 が同数ずつ含まれる場合はすべて,

$$(\text{上面, 3段, 2段, 1段}) = (9, 12, 16, 12) \quad \text{であり}$$

$$S = 9 + 12 + 16 + 12 = 49 \text{ cm}^2$$

である。

そこで, $S = 49$ 以外の値が出てくる可能性があるのは, 9 つの場所において, 2 の個数が 1, 3 の個数より多く含まれる場合である。上の ①~⑳の中で,

2 を L の字 (もしくはひっくり返した文字) に含む場合は

$$(\text{上面, 3段, 2段, 1段}) = (9, 8, 16, 12) \quad \text{であり}$$

$$S = 9 + 8 + 16 + 12 = 45 \text{ cm}^2$$

である。

2 を T の字に含む場合は

$$(\text{上面, 3段, 2段, 1段}) = (9, 8, 14, 12) \quad \text{であり}$$

$$S = 9 + 8 + 14 + 12 = 43 \text{ cm}^2$$

である。

2 を ^{じゅう}十 の字に含む場合は

$$(\text{上面, 3段, 2段, 1段}) = (9, 8, 12, 12) \quad \text{であり}$$

$$S = 9 + 8 + 12 + 12 = 41 \text{ cm}^2$$

である。

すべてが 2 の場合は

$$(\text{上面, 3段, 2段, 1段}) = (9, 0, 12, 12) \quad \text{であり}$$

$$S = 9 + 0 + 12 + 12 = 33 \text{ cm}^2$$

である。

以上より、求める S の値は

$$S = 49, 45, 43, 41, 33$$

である。よって、たとえば次のような書き方になる。

$S = 49 \text{ cm}^2$ 具体例の 1 つは

1	2	3
2	3	1
3	1	2

具体例は ①, ②, ⑤, ⑦, ⑨, ⑪, ⑬, ⑮, ⑲, ⑳, ㉑, ㉓, ㉕
の中から一つ選ぶ。

$S = 45 \text{ cm}^2$ 具体例の 1 つは

2	1	3
2	3	1
2	2	2

具体例は ⑥, ⑩, ⑭, ⑱, ⑳, ㉑, ㉔, ㉖
の中から一つ選ぶ。

$S = 43 \text{ cm}^2$ 具体例の 1 つは

2	2	2
1	2	3
3	2	1

具体例は ③, ⑧, ⑫, ⑯, ⑳, ㉒, ㉗, ㉘
の中から一つ選ぶ。

$S = 41 \text{ cm}^2$ 具体例の 1 つは

1	2	3
2	2	2
3	2	1

具体例は ④, ㉙
の中から一つ選ぶ。

$S = 33 \text{ cm}^2$ 具体例の 1 つは

2	2	2
2	2	2
2	2	2

具体例は ㉚
のみである。