▶SSH 課題探究◀

2•13

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，⋯，T_n があり，次の条件 (A)，(B) を満たす。

(A)　T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している。$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

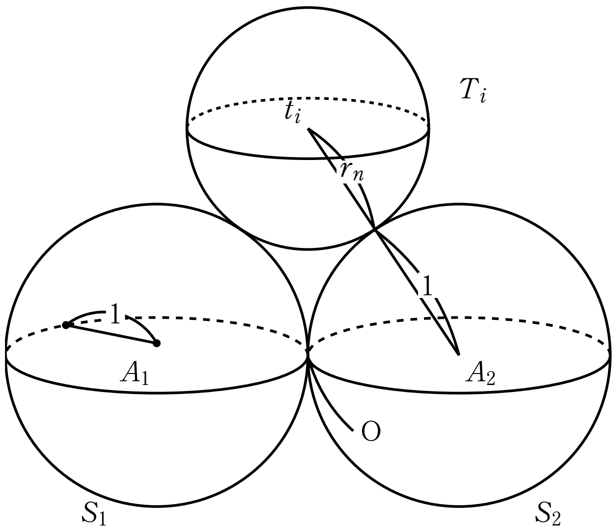
(B)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

（1） T_1，T_2，⋯，T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

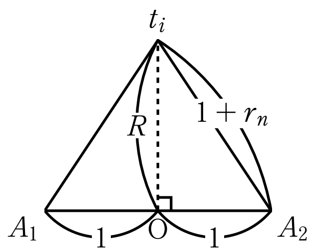
（2） S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線の周りに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし T_1，T_2，⋯，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。

参考　内藤武士君のレポートより

（1） 球 S_1，S_2 の中心を A_1，A_2 とする。

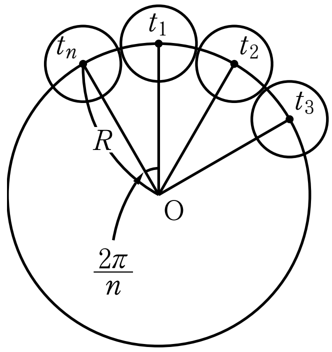


上図のように，S_1，S_2 の接点を O，球 T_i の中心を t_i とすると，

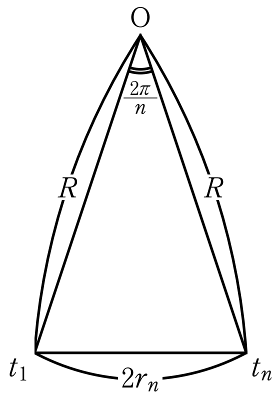


ここで，$R=\sqrt{(1+r_n)^2-1^2}=\sqrt{2r_n+r_n{}^2}$

また，最初の図を左側から見て，2 つの球 S_1，S_2 に接している n 個の球 T_1，T_2，⋯，T_n，T_1 がある円の周りを一周にわたり接しているから，それらの中心，t_1，t_2，⋯，t_n，t_1 の配置は下図のようになると考えられる。



また，$t_nt_1=2r_n$ だから，



$\triangle Ot_1t_2$ において，余弦定理より，

$$(t_1t_n)^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$=2R^2\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$=2(2r_n+r_n{}^2)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\therefore\quad 4r_n{}^2=2(2r_n+r_n{}^2)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

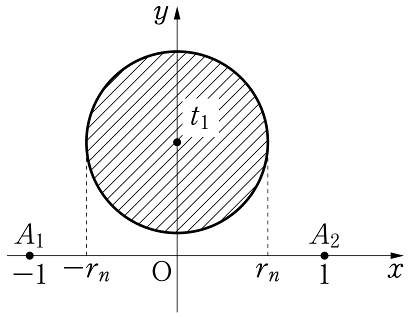
$r_n>0$ より，

$$2r_n=(2+r_n)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

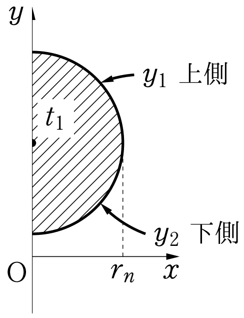
$$\therefore\quad \left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)r_n=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\therefore\quad r_n=2\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$$

（2） V_n は，次図の円板を x 軸の周りに回転した立体の体積である。



この円板は，y 軸対称なので，$x \geqq 0$ の部分のみを考える。



点 $t_1(0,\ R)$ より，

円：$x^2+(y-R)^2={r_n}^2$

$\therefore\quad y=R\pm\sqrt{{r_n}^2-x^2}$

$$\therefore\quad \begin{cases} y_1=R+\sqrt{{r_n}^2-x^2} \\ y_2=R-\sqrt{{r_n}^2-x^2} \end{cases}$$

よって，

$$\frac{V_n}{2}=\int_0^{r_n}(\pi {y_1}^2-\pi {y_2}^2)\,dx$$

ここで，$r_n=r$ とおく。

$$\frac{V_n}{2}=\pi\int_0^r\left((R+\sqrt{r^2-x^2})^2-(R-\sqrt{r^2-x^2})\right)dx$$

$$=\pi\int_0^r 4R\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=4R\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta$ とおく。

$$\frac{dx}{d\theta}=r\cos\theta$$

x	$0\ \to\ r$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

$$\frac{V_n}{2}=4R\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$$=4Rr^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=4Rr^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2Rr^2\pi\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2Rr^2\pi\cdot\frac{\pi}{2}4$$

$$=Rr^2\pi^2$$

$$\therefore\quad V_n=2\pi^2Rr^2$$

一方，S_i の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

で，それが n 個あるので，

$$W_n=\frac{4}{3}n\pi r^3$$

$$\therefore\quad \frac{W_n}{V_n}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3n}{2\pi^2Rr^2}$$

$$=\frac{2nR}{3\pi\sqrt{r^2+2r}}$$

$$(\because\quad R=\sqrt{r^2+2r})$$

$$=\frac{2n}{3\pi\sqrt{1+\frac{2}{r}}}$$

$$=\frac{2n}{3\pi\sqrt{1+\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}}}$$

$$=\frac{2n}{3\pi\sqrt{\frac{2}{1-\cos\frac{2\pi}{n}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}n\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}}{3\pi}$$

ここで，$\frac{2\pi}{n}=t$ とおくと，

$$n\to\infty\quad\Longleftrightarrow\quad t\to+0$$

に注意する。

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot2\pi\sqrt{1-\cos t}}{3\pi\cdot t}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\sin^2t}{t^2(1+\cos t)}}$$

また，

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t}{t^2}=1$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{(1+\cos t)}=\frac{1}{2}$$

に注意して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}=\lim_{t\to+0}\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\sin^2t}{t^2(1+\cos t)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

解説　空間で，2 つの球 S_1，S_2 に n 個の球が条件のように接している状態を頭に描けるかがポイントである。

$r_n=2\cdot\dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$ と変形すると，後半の計算部分が変わってくる。試してみたい。