▶SSH 課題探究◀

11•7

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a^2+b^2+c^2=1$ のとき，$S=\dfrac{(c+1)^2}{2abc}$ の最小値を求めよ。

参考　中山栞里さんのレポートより

c を固定する。

$S=\dfrac{(c+1)^2}{2abc}=\dfrac{1}{2ab}\cdot\dfrac{(c+1)^2}{c}$ となるので，S が最小となるのは，ab の値が最大となるときである。よって，$a^2+b^2=1-c^2$ の条件の下で，ab つまり，a^2b^2 が最大となる a，b の値を求める。

$b^2=1-c^2-a^2$ だから，

$$\begin{aligned}a^2b^2&=a^2(1-c^2-a^2)\\&=-a^4+(1-c^2)a^2\\&=-\{a^4-(1-c^2)a^2\}\\&=-\left\{\left(a^2-\frac{(1-c^2)}{2}\right)^2-\frac{(1-c^2)^2}{4}\right\}\\&=-\left(a^2-\frac{(1-c^2)}{4}\right)^2+\frac{(1-c^2)^2}{4}\end{aligned}$$

ここで，$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a^2+b^2+c^2=1$ より，$0<a<1$，$0<c<1$ である。

$$\begin{aligned}&0<c^2<1\\&-1<-c^2<0\\&0<1-c^2<1\\&0<\frac{1-c^2}{2}<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$a^2=\dfrac{1-c^2}{2}$ のとき，a^2b^2 は最大値をとる。

このとき，

$$b^2=1-c^2-\frac{(1-c)^2}{2}=\frac{1-c^2}{2}$$

となる。よって，$a^2=b^2=\dfrac{(1-c)^2}{2}$ のとき，すなわち，

$$a=b=\sqrt{\frac{(1-c)^2}{2}}$$ のとき，ab は最大値

$$ab=\frac{(1-c^2)}{2}$$

をとる。これより，

$$\begin{aligned}S&\geqq\frac{1}{2\cdot\frac{(1-c^2)}{2}}\cdot\frac{(c+1)^2}{2}\\&=\frac{(c+1)^2}{c(1-c^2)}\\&=\frac{(1+c)^2}{c(1+c)(1-c)}\\&=\frac{(1+c)}{c(1-c)}\\&=\frac{(1+c)}{(c-c^2)}\end{aligned}$$

等号成立は，$a=b=\sqrt{\dfrac{(1-c)^2}{2}}$ のとき。

$f(c)=\dfrac{(1+c)}{(c-c^2)}$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(c)&=\frac{(c-c^2)-(1+c)(1-2c)}{(c-c^2)^2}\\&=\frac{(c-c^2)-(-2c^2-c+1)}{(c-c^2)^2}\\&=\frac{c^2+2c-1}{(c-c^2)^2}\end{aligned}$$

$f'(c)=0$ とすると，

$$c^2+2c-1=0$$

$$\therefore\quad c=-1\pm\sqrt{2}$$

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a^2+b^2+c^2=1$ より，

$$0<c<1$$

よって，$c=-1+\sqrt{2}$

c	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		↘		↗	

よって，$c=-1+\sqrt{2}$ のとき，$f(c)$ は最小値をとる。

$$\begin{aligned}f(-1+\sqrt{2})&=\frac{(-1+\sqrt{2}+1)^2}{(-1+\sqrt{2})(1-(3-2\sqrt{2}))}\\&=\frac{(\sqrt{2})^2}{(-1+\sqrt{2})\cdot2(\sqrt{2}-1)}\\&=\frac{2}{2(3-2\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\\&=3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

以上より，$a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，$c=\sqrt{2}-1$ のとき S は最小値 $3+2\sqrt{2}$ をとる。

解説　c を固定することで，一文字変数の最小値の問題に帰着できた。$f(c)$ の最小値を求めるところでは，分数関数の微分，増減表と数 III を使っている。

前半で相加相乗平均の不等式を使ったので、一貫してみるのもおもしろい。$c+1>0$ だから，$f(c)$ の最小値を求めるところで，相加相乗平均の不等式を使う。

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(c)}&=\frac{c(1-c)}{c+1}=\frac{-c^2+c}{c+1}\\&=-c+2+\frac{-2}{c+1}=-(c+1)+3-\frac{2}{c+1}\\&=3-\left((c+1)+\frac{2}{c+1}\right)\leqq3-2\sqrt{(c+1)\cdot\frac{2}{(c+1)}}\\&=3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と変形できる。ゆえに，$f(c)\geqq\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$ である。

等号成立条件は，$c+1=\dfrac{2}{c+1}$ かつ $c+1>0$ すなわち，$c+1=\sqrt{2}$ のときである。

参考　長田景也君のレポートより

$a^2>0$，$b^2>0$ だから，相加相乗平均の不等式より，

$$a^2+b^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab \cdots ①$$

$$S=\frac{(c+1)^2}{2abc} \geqq \frac{(c+1)^2}{(a^2+b^2)c}$$

$a^2+b^2+c^2=1$ より，$a^2+b^2=1-c^2$ だから，

$$\begin{aligned} S &\geqq \frac{(c+1)^2}{(1-c^2)c} \\ &= \frac{(c+1)^2}{(1+c)(1-c)c} \\ &= \frac{c+1}{(1-c)c} \end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{c+1}{(1-c)c}=k$$ とおく。

$0<c<1$ より，$k>0$

$$c+1=k(1-c)c$$

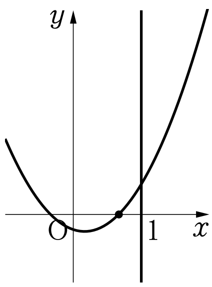
$$\therefore \quad kc^2+(1-k)c+1=0$$

c は $0<c<1$ を満たす実数だから，この方程式は $0<c<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

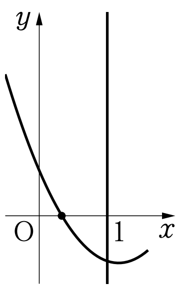
$f(x)=kx^2+(1-k)x+1$ とおく。

$0<x<1$ の範囲で，方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つ解をもつための条件は，

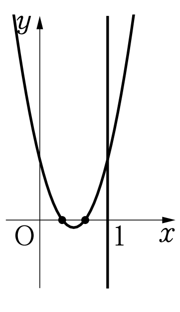
（ i ）$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$



（ ii ）$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \end{cases}$



（iii）$\begin{cases} D \geqq 0 \\ f(0)>0,\ f(1)>0 \quad \cdots (*) \\ 0<\text{軸}<1 \end{cases}$



条件 $a^2+b^2+c^2=1$，a，b，$c>0$ より，

$$0<a<1,\ 0<b<1,\ 0<c<1$$

また，

$$f(0)=1>,\ f(1)=2>0$$

は任意の k に対して成り立つから，(i)，(ii) の場合はない。(iii) の残りの条件は，

$$D=(1-k)^2-4\cdot k\cdot 1 \geqq 0$$

$$\therefore \quad k^2-6k+1 \geqq 0$$

$$\therefore \quad k \leqq 3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2} \leqq k$$

軸については，

$$\begin{aligned} f(x) &= kx^2+(1-k)x+1 \\ &= k\left\{x^2+\frac{1-k}{k}x\right\}+1 \\ &= k\left\{\left(x+\frac{1-k}{2k}\right)^2-\frac{(1-k)^2}{4k^2}\right\}+1 \\ &= k\left(x+\frac{1-k}{2k}\right)^2-\frac{(1-k)^2}{4k}+1 \end{aligned}$$

だから，軸の方程式は，$x=\dfrac{k-1}{2k}$

$$\therefore \quad 0<\frac{k-1}{2k}<1$$

$k>0$ だから，

$$\begin{cases} 0<k-1 \\ k-1<2k \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 1<k \\ -1<k \end{cases}$$

$$\therefore \quad 1<k$$

ゆえに，$(*)$ は，

$$\begin{cases} k \leqq 3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2} \leqq k \\ 1<k \end{cases}$$

$$\therefore \quad 3+2\sqrt{2} \leqq k$$

$$\therefore \quad S \geqq \frac{c+1}{(1-c)c}=k \geqq 3+2\sqrt{2}$$

等号成立条件は，

$$\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2+b^2+c^2=1 & \cdots ① \\ a^2=b^2 & \cdots ② \\ \dfrac{c+1}{(1-c)c}=3+2\sqrt{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

よって，

$$a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1},\ c=\sqrt{2}-1$$

のときである。以上より，

$a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，$c=\sqrt{2}-1$ のとき，S の最小値は，

$$3+2\sqrt{2}$$

解説　「解の配置問題」はここでも有用である。