▶SSH 課題探究◀

9・19

（１）　すべての自然数 k に対して，

$$\int_k^{k+1}(x^3+ax^2+bx+c)\,dx=k^3$$

が成り立つように定数 a，b，c の値を定めよ。

（２）　(1) を用いて，和 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ を求めよ。

（３）　上記の考え方と同様に，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求めよ。

参考　赤羽智大君のレポートより

（１）　$\displaystyle\int_k^{k+1}(x^3+ax^2+bx+c)\,dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_k^{k+1}$$

$$=\frac{(k+1)^4}{4}+\frac{a(k+1)^3}{3}+\frac{b(k+1)^2}{2}+c(k+1)$$

$$-\left(\frac{k^4}{4}+\frac{ak^3}{3}+\frac{bk^2}{2}+ck\right)$$

$$=\frac{k^4+4k^3+6k^2+4k+1}{4}+\frac{a(k^3+3k^2+3k+1)}{3}$$

$$+\frac{b(k^2+2k+1)}{2}+ck+c$$

$$-\left(\frac{k^4}{4}+\frac{ak^3}{3}+\frac{bk^2}{2}+ck\right)$$

$$=\frac{4k^3+6k^2+4k+1}{4}+\frac{3ak^2+3ak+a}{3}$$

$$+\frac{2bk+b}{2}+c$$

$$=\frac{1}{12}\{12k^2+18k^2+12k+3$$

$$+12ak^2+12ak+4a+12kb+6b+12c\}$$

$$=\frac{1}{12}\{12k^3+(18+12a)k^2+(12+12a+12b)k$$

$$+3+4a+6b+12c\}(=k^3)$$

この等式が，すべての自然数 k に対して成り立つから，係数を比較して，

$$\begin{cases}18+12a=0\\12+12a+12b=0\\3+4a+6b+12c=0\end{cases}$$

$12a=-18$　　$\therefore$　$a=-\dfrac{3}{2}$

$12+12\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+12b=0$

$12b=6$　　$\therefore$　$b=\dfrac{1}{2}$

$3+4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+6\cdot\dfrac{1}{2}+12c=0$

$12c=0$　　$\therefore$　$c=0$

以上より，

$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=0$

（２）　条件式は，

$$\int_k^{k+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=k^3$$

となるので，

$k=1$ のとき，$\displaystyle\int_1^2\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=1^3$

$k=2$ のとき，$\displaystyle\int_2^3\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=2^3$

$k=3$ のとき，$\displaystyle\int_3^4\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=3^3$

……

$k=n$ のとき，$\displaystyle\int_n^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=n^3$

辺々を加えて，

$$\int_1^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$$

また，

$$\int_1^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{(n+1)^3}{2}+\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{4}-\frac{n^3+3n^2+3n+1}{2}$$

$$+\frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\{2n^4+8n^3+12n^2+8n+2$$

$$-(4n^3+12n^2+12n+4)+2n^2+4n+2\}$$

$$=\frac{2n^4+4n^3+2n^2}{8}$$

$$=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

（３）　$\displaystyle\int_k^{k+1}(x^2+dx+e)\,dx=k^2$

この等式がすべての自然数 k に対して成り立つように，定数 d，e を定める。

$$\int_k^{k+1}(x^2+ex+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{dx^2}{2}+ex\right]_k^{k+1}$$

$$=\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{d(k+1)^2}{2}+e(k+1)$$

$$-\left(\frac{k^3}{3}+\frac{dk^2}{2}+ek\right)$$

$$=\frac{k^3+3k^2+3k+1}{+}\frac{d(k^2+2k+1)}{2}$$

$$+bk+b-\left(\frac{k^3}{3}+\frac{dk^2}{2}+ek\right)$$

$$=\frac{1}{6}\{6k^2+6k+2+6dk+3d+6e\}(=k^2)$$

係数を比較して，

$$\begin{cases} 6+6d=0 \\ 2+3d+6e=0 \end{cases}$$

$$6d=-6 \quad \therefore \quad d=-1$$

$$2-3+6e=0 \quad \therefore \quad e=\frac{1}{6}$$

よって，

$$\int_k^{k+1}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=k^2$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\therefore \quad \int_1^{n+1}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

ここで，

$$\int_1^{n+1}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{n+1}{6}$$
$$-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-6n-3+n+1\}$$
$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$
$$=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$$
$$=\frac{n}{6}(2n+1)(n+1)$$

$$\therefore \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

解説　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ という有名な公式を積分を用いて導く。定積分の計算等を丁寧にやっている。この量の計算をミスなく完成させる計算力を持ちたい。また，計算のポイントとして，

$$\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)\,dx$$
$$=\int_1^{n+1}f(x)\,dx$$

を使っている。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ も同様に導くことができるので，確かめてみよ。

参考　田村知世さんのレポートより

（１）　省略

（２）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_k^{k+1}$$

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{4}x^2$ とおく。

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[f(x)\Big]_k^{k+1}=\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\}$$
$$+\{f(4)-f(3)\}+\cdots$$
$$+\{f(n)-f(n-1)\}+\{f(n+1)-f(n)\}$$
$$=-f(1)+f(n+1)$$
$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^4$$
$$=(n+1)^2\left\{\frac{1}{4}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

よって，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

（３）　$\displaystyle\int_k^{k+1}(x^2+dx+e)\,dx=k^2$ とおく。

(1) と同様に計算して，k についての恒等式となるような d，e の値は，

$$d=-1,\ e=\frac{1}{6}$$

よって，

$$\int_k^{k+1}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)dx=k^2$$

$$\therefore \quad \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x\right]_k^{k+1}=k^2$$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ となるので，

$g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\Big[g(x)\Big]_k^{k+1}$$
$$=\{g(2)-g(1)\}+\{g(3)-g(2)\}+\cdots$$
$$+\{g(n)-g(n-1)\}+\{g(n+1)-g(n)\}$$
$$=-g(1)+g(n+1)$$
$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)$$
$$=\frac{(n+1)}{6}\{2(n+1)^2-3(n+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

よって，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

解説　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big[f(x)\Big]_k^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}$

$$=\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\}$$
$$+\{f(4)-f(3)\}+\cdots\{f(n+1)-f(n)\}$$
$$=-f(1)+f(n)$$

がポイントである。定積分の性質のひとつ前の計算を使っているが，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ の教科書の導き方の仕組みに近いものがある。