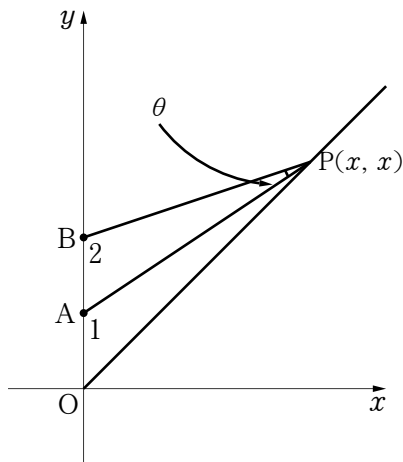


▶SSH 課題探究 ◀

8・25

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり, $\triangle APB$ を考える。 x の値が変化するとき, $\angle APB$ の最大値を求めよ。

【参考】 宮澤友樹君のレポートより



直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を α , 直線 BP と x 軸の正の向きとのなす角を β とすると,

直線 AP の傾きは, $\tan \alpha = \frac{x-1}{x}$,

直線 BP の傾きは, $\tan \beta = \frac{x-2}{x}$

である。

$\angle APB = \theta$ とすると,

$$\theta = \alpha - \beta$$

だから,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x}}{1 + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} \\ &= \frac{x}{2x^2 - 3x + 2} \\ &= \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3} \end{aligned}$$

$x > 0$ だから, 相加相乗の不等式より,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

等号は, $x = \frac{1}{x}$ のとき, すなわち,

$x = 1$ のときに成立する。 $(\because x > 0 \text{ より})$

よって,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3} \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 2 - 3} = 1 \end{aligned}$$

であり, $x = 1$ のときに $\tan \theta$ は最大値 1 をとる。

点 P は AB を直径とする円の外部にあるから,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

これより, $\tan \theta = 1$ を満たす θ は,

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

【解説】 直線の傾きとタンジェントの関係から, $\tan \theta$ を加法定理で展開し, 相加相乗の不等式を利用。

【参考】 長田景也君のレポートより

三角形 PAB の $\angle P = \theta$ に関する余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{2 \cdot PA \cdot PB} \\ &= \frac{(2x^2 - 2x + 1) + (2x^2 - 4x + 4) - 1}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\sqrt{2x^2 - 4x + 4}} \\ &= \frac{4x^2 - 6x + 4}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\sqrt{2x^2 - 4x + 4}} \\ \therefore \cos^2 \theta &= \frac{(2x^2 - 3x + 2)^2}{(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 4x + 4)} \\ &= \frac{4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 12x + 4}{4x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 4} \\ &= \frac{(4x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 4) - x^2}{4x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 4} \\ &= 1 - \frac{x^2}{4x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 4} \\ &= 1 - \frac{1}{4x^2 - 12x + 18 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 4x^2 - 12x + 18 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} \\ &= 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 18 \\ &= 4\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 18 \\ &= 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \end{aligned}$$

ここで, $x + \frac{1}{x} = t$ とおくと,

$$t = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore P = 4t^2 - 12t + 10 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

より, $t = 2 (\because x = 1)$ のときに最小値 $P = 2$ をとる。

よって, $\cos^2 \theta$ は $x = 1$ のとき, 最小値

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

すなわち, $\cos \theta$ は最小値 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で, $\cos \theta$ が最小のとき, θ は最大となるので, 求める $\angle APB = \theta$ の最大値は, $\theta = \frac{\pi}{4}$

【解説】 余弦定理からの $\cos^2 \theta$ の分数式の式変形は一連の流れである。やはり, 相加相乗の不等式は使っている。