▶SSH 課題探究◀

7•11

x，y の動く範囲を $0 \leqq x \leqq 2\pi$，$0 \leqq y \leqq 2\pi$ とするとき，不等式 $\sin x + \sin y \geqq \cos x + \cos y$ の表す領域を平面上に図示せよ。

参考　北村遼平君のレポートより

$\sin x + \sin y \geqq \cos x + \cos y$

$$\iff \quad \sin x + \sin y - (\cos x + \cos y) \geqq 0$$

$$\iff \quad 2\sin\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2} - 2\cos\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2} \geqq 0$$

$$\iff \quad \sin\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2} - \cos\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2} \geqq 0$$

$$\iff \quad \cos\frac{y-x}{2}\left(\sin\frac{y+x}{2} - \cos\frac{y+x}{2}\right) \geqq 0$$

ここで，

$$\sin\frac{y+x}{2} - \cos\frac{y+x}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$\cos\frac{y-x}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \cos\frac{y-x}{2}\sin\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$$

また，$0 \leqq x \leqq 2\pi$，$0 \leqq y \leqq 2\pi$ より，

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi \cdots\cdots ①$$

$$-\pi \leqq \frac{y-x}{2} \leqq \pi \cdots\cdots ②$$

（ｉ）
$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{y+x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq 0 & \cdots\cdots ③ \\ \cos\dfrac{y-x}{2} \geqq 0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

のとき，

① の範囲では，③ より，

$$0 \leqq \frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqq \pi$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} \leqq \frac{y+x}{2} \leqq \frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} \leqq y + x \leqq \pi$$

$$\therefore \quad -x + \frac{\pi}{2} \leqq y \leqq -x + \frac{5\pi}{2} \cdots\cdots Ⓐ$$

② の範囲では，④ より，

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{y-x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad -\pi \leqq y - x \leqq \pi$$

$$\therefore \quad x - \pi \leqq y \leqq x + \pi \cdots\cdots Ⓑ$$

（ii）
$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{y+x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 0 & \cdots\cdots ⑤ \\ \cos\dfrac{y-x}{2} \leqq 0 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

のとき，

① の範囲では，⑤ より，

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqq 0,\ \pi \leqq \frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore \quad 0 \leqq y + x \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi \leqq y + x \leqq 4\pi$$

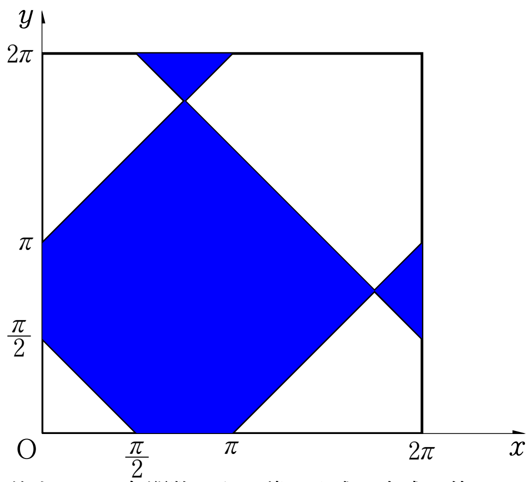
$$\therefore \quad \begin{cases} -x \leqq y \leqq -x + \dfrac{\pi}{2} \\ -x + \dfrac{5}{2}\pi \leqq y \leqq -x + 4\pi \end{cases} \cdots\cdots Ⓒ$$

② の範囲では，⑥ より，

$$-\pi \leqq \frac{x-y}{2} \leqq -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \leqq \frac{x-y}{2} \leqq \pi$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x - 2\pi \leqq y \leqq x - \pi \\ x + \pi \leqq y \leqq x + 2\pi \end{cases} \cdots\cdots Ⓓ$$

以上より，Ⓐ と Ⓑ，Ⓒ と Ⓓ の共通部分をとり，下図の領域を得る。ただし，境界線も含む。



解説　前半で，三角関数の和・積の公式と合成を使っている。x，y の範囲に注意しながら領域を求めることができ，また，与不等式の文字の対称性から求める領域が直線 $y = x$ に関して対称であることも予想している。$z = f(x,\ y) = \sin x + \sin y$，$z = g(x,\ y) = \cos x + \cos y$ とすると，平面上の図の斜線部分とその他の部分で，曲面 $z = f(x,\ y)$，$z = g(x,\ y)$ の大小関係が入れ替わっていることがわかる。実際に曲面の様子をみると次のようになっていて，求める領域の様子が立体的にみえる。