

▶SSH 課題探究 ◀

10・7

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 27^{n^2-3n-9}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) a_n の値が最小となるときの n の値を求めよ。

【参考】 K.S 君のレポートより

(1) $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= 27^{(n-1)^2-3(n-1)-9}a_{n-1} \\ &= 27^{(n-1)^2-3(n-1)-9} \cdot 27^{(n-2)^2-3(n-2)-9}a_{n-2} \\ &= 27^{(n-1)^2-3(n-1)-9} \cdot 27^{(n-2)^2-3(n-2)-9} \cdot 27^{(n-3)^2-3(n-3)-9}a_{n-3} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 27^{(n-1)^2-3(n-1)-9} \times 27^{(n-2)^2-3(n-2)-9} \\ &\quad \times \dots \times 27^{2^2-3 \cdot 2-9} \times 27^{1^2-3 \cdot 1-9}a_1 \\ &= 27^{\{(n-1)^2-3(n-1)-9\} + \{(n-2)^2-3(n-2)-9\} + \dots + \{1^2-3 \cdot 1-9\}} \times 1 \end{aligned}$$

$$= 27^{\sum_{k=1}^{n-1} (k^2-3k-9)}$$

$$= 3^{3 \sum_{k=1}^{n-1} (k^2-3k-9)}$$

ここで、指数の部分は、

$$3 \sum_{k=1}^{n-1} (k^2-3k-9) = 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$-3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 3 \cdot 9(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)n(2n-1) - \frac{9}{2}(n-1)n - 27(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)\{n(2n-1) - 9n - 54\}$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(2n^2 - 10n - 54)$$

$$= (n-1)(n^2 - 5n - 27)$$

よって、

$$a_n = 3^{(n-1)(n^2-5n-27)}$$

$a_1 = 1$ より、 $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) $f(n) = (n-1)(n^2-5n-27)$ とする。

関数 $y = 3^x$ は単調増加関数だから、

$f(n)$ が最小のときに、 $a_n = 3^{f(n)}$ は最小となる。

ここで、 $f(x) = (x-1)(x^2-5x-27)$ ($x > 0$) とすると、

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 22x + 27$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x - 22$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると,}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{102}}{3}$$

$$\alpha = \frac{6 + \sqrt{102}}{3} \text{ とすると,}$$

$$5 < \alpha < 6$$

$f(x)$ の増減表は、 $x > 0$ の範囲で、

x	0	...	α	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	27	$\searrow$		$\nearrow$

n は自然数だから、

$$f(5) = (5-1)(5^2-5^2-27) = 4 \times (-27) = -108$$

$$f(6) = (6-1)(6^2-5 \cdot 6-27) = 5 \times (-21) = -105$$

より、 $n = 5$ のとき $f(n)$ は最小となる。

以上より、 a_n の値が最小となるのは、 $n = 5$ のときである。

【解説】 漸化式の番号を一つひとつ下げて繰り返し代入していくと、 a_n が求められる。

【参考】 K.T. 君のレポートより

(1) $a_1 = 1 > 0$, $a_{n+1} = 27^{n^2-3n-9}a_n \dots$ ① より、すべての自然数 n について、

$$a_n > 0$$

これより、① の両辺の底を 3 とする対数をとると、

$$\log_3 a_{n+1} = \log_3 (3^{n^2-3n-9}a_n)$$

$$= \log_3 a_n + 3(n^2 - 3n - 9)$$

$$\therefore \log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = 3(n^2 - 3n - 9)$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\log_3 a_n = \log_3 a_1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 3k - 9)$$

$$= 3 \left\{ \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 9(n-1) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)n(2n-1) - \frac{9}{2}(n-1)n - 27(n-1)$$

$$= (n-1)(n^2 - 5n - 27)$$

$$\therefore a_n = 3^{(n-1)(n^2-5n-27)}$$

これは、 $n = 1$ のときも成り立つ。

解説 真数条件を満たしていることを述べ、両辺の対数をとること

$$\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = 3(n^2 - 3n - 9), \log_3 a_1 = 0$$

より、数列 $\{\log_3 a_n\}$ の階差数列が、 $\{3(n^2 - 3n - 9)\}$ であることを用いて、 $n \geq 2$ のとき、

$\log_3 a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k^2 - 3k - 9)$ として、階差数列の問題に帰着させる。指数の部分の計算を強調して進めるときに、対数をとることは有効である。

参考 T.T 君のレポートより

(1) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対し、

$$a_1 = 1 > 0, 27^{n^2-3n-9} > 0$$

より、

$$a_n > 0$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 27^{n^2-3n-9}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot a_1 \quad (n \geq 2) \\ &= 27^{\sum_{k=1}^{n-1} (k^2-3k-9)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 3k - 9) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &\quad - \frac{3}{2}(n-1)n - 9(n-1) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)(2n^2 - 10n - 54) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)(n^2 - 5n - 27) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 3^{(n-1)(n^2-5n-27)} \quad (n=1 \text{ をみたく})$$

解説 記号の説明： $\forall$ は「任意の、すべての」の意味。 $\in$ は集合に「属する」の意味。 $\mathbf{N}$ は「自然数の集合」を表す。

$$\forall n \in \mathbf{N} \iff \text{「任意の自然数 } n \text{ に対して」}$$

$$\prod_{k=1}^3 c_k = c_1 \times c_2 \times c_3$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot a_1 = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_n$$

参考 M.S. 君のレポートより

$$(2) \quad a_{n+1} = 27^{n^2-3n-9} a_n$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 27^{n^2-3n-9}$$

ここで、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ を満たす自然数 n を求める。

$$27^{n^2-3n-9} > 1$$

両辺の底を 3 とする対数をとると、

$$3(n^2 - 3n - 9) \log_3 3 > \log_3 1$$

$$\therefore n^2 - 3n - 9 > 0$$

$$\therefore n(n-3) > 9$$

$$\therefore n = 5, 6, 7, \dots$$

これより、

$$\begin{cases} a_{n+1} < a_n & (n = 1, 2, 3, 4) \\ a_{n+1} > a_n & (n = 5, 6, 7, \dots) \end{cases}$$

$$\therefore a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5,$$

$$a_5 < a_6 < a_7 < \dots$$

が成り立つ。これより、 $n = 5$ のときに a_n は最小となる。

解説 数列の最小値、最大値の問題では、 $a_{n+1} - a_n > 0$, $a_{n+1} - a_n < 0$, また、 $a_n > 0$ ($n \geq 1$) のときは、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ などを計算して調べることが多い。さらに、 n が自然数であるから、例えば、

$$n^2 - 3n - 9 < 0$$

を解くのに、解の公式を用いて、

$$\frac{3-3\sqrt{5}}{2} < n < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

などと、計算を進めると、根号の扱いがやや面倒になる。

$$n(n-3) < 9$$

と変形して、 $n = 1, 2, 3, \dots$ と順に代入して、成り立つ場合を調べる。