▶SSH 課題探究 ◀

7•12

a，b は正の整数とする。$\sqrt{3}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にあることを証明せよ。

参考　S.Y. 君のレポートより

$\sqrt{3}$ が $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にある。

$\iff$

$\dfrac{a}{b}<\sqrt{3}<\dfrac{a+3b}{a+b}$ または，$\dfrac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\dfrac{a}{b}$

$\iff$

$\left(\dfrac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{a}{b}-\sqrt{3}\right)<0\cdots$①

である。これより，① が成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\\
&=\frac{a(a+3b)}{b(a+b)}-\sqrt{3}\left(\frac{a+3b}{a+b}+\frac{a}{b}\right)+3\\
&=\frac{a^2+3ab-\sqrt{3}(a^2+2ab+3b^2)}{b(a+b)}+3\\
&=\frac{(1-\sqrt{3})a^2+(3-2\sqrt{3})ab-3\sqrt{3}b^2+3ab+3b^2}{b(a+b)}\\
&=\frac{(1-\sqrt{3})a^2+(6-2\sqrt{3})ab+(3-3\sqrt{3})b^2}{b(a+b)}\\
&=\frac{(1-\sqrt{3})(a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2)}{b(a+b)}\\
&=\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}<0
\end{aligned}$$

である。

なぜなら，a，b は正の数より，

$1-\sqrt{3}<0$，$(a-\sqrt{3}b)^2\geqq 0$，$b(a+b)>0$

である。

さらに，$a-\sqrt{3}b=0$ とすると，$b\neq 0$ より，$\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$ となり，有理数と無理数が等しいことになり，矛盾である。よって，$a-\sqrt{3}b\neq 0$ だから，

$$(a-\sqrt{3}b)^2>0$$

真に正である。

以上より，① が証明されたので，題意は成り立つ。

解説　① が目指すことであることを押さえている。① の証明の式変形は，他にも，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{a+3b}{a+b}-\sqrt{3}\right)\\
&=\frac{a-\sqrt{3}b}{b}\times\frac{a+3b-\sqrt{3}(a+b)}{a+b}\\
&=\frac{(a-\sqrt{3}b)\{(1-\sqrt{3})a-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})b\}}{b(a+b)}\\
&=\frac{(1-\sqrt{3})(a-\sqrt{3}b)^2}{b(a+b)}<0
\end{aligned}$$

とした式変形も自然である。

いずれにせよ，$3-\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ などの変形はよく使う。

参考　S.K. 君のレポートより

a，b は正の整数だから，

$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$

は正の有理数である。また，$\sqrt{3}$ は無理数なので，

$$\frac{a}{b}\neq\sqrt{3},$$

$$\left(\text{同様に，}\frac{a+3b}{a+b}\neq\sqrt{3}\text{でもある。}\right)$$

そこで，$\sqrt{3}<\dfrac{a}{b}$，$\sqrt{3}>\dfrac{a}{b}$ のとき，のそれぞれで，題意を満足することを示す。

（ｉ）　$\sqrt{3}<\dfrac{a}{b}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{a+3b}{a+b}&=1+\frac{2b}{a+b}\\
&=1+\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\\
&<1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\\
&=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\\
&=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a+3b}{a+b}<\sqrt{3}<\frac{a}{b}$$

である。

（ii）　$\sqrt{3}>\dfrac{a}{b}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{a+3b}{a+b}&=1+\frac{2b}{a+b}\\
&=1+\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\\
&>1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\\
&=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a+3b}{a+b}>\sqrt{3}>\frac{a}{b}$$

である。

以上，（ｉ），（ii）より，$\sqrt{3}$ は，$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+3b}{a+b}$ の間にある。

解説　有理数と無理数は一致しないことに注目して，$\dfrac{a}{b}$ と $\sqrt{3}$ が等しくないことを述べ，そこから，$\dfrac{a}{b}$ が $\sqrt{3}$ より大きい場合と，$\sqrt{3}$ より小さい場合のいずれかが必ず成り立つことがわかる。それぞれの場合に関して，（ｉ）「$\dfrac{a}{b}$ が $\sqrt{3}$ より大きいならば，$\dfrac{a+3b}{a+b}$ は $\sqrt{3}$ より小さい」，（ii）「$\dfrac{a}{b}$ が $\sqrt{3}$ より小さいならば，$\dfrac{a+3b}{a+b}$ は $\sqrt{3}$ より大きい」ことを，自然な式変形で示している。