▶SSH 課題探究◀

4•10

x の方程式　$\dfrac{1}{x-1}=a(x-2)$　の実数解の個数を定数 a の値で分類せよ。

参考　T.T. 君のレポートより

［I］　$a=0$ のときは，方程式 $\dfrac{1}{x-1}=0$ は解をもたない。

すなわち，$a=0$ のときは，実数解の個数は 0 個である。

［II］　$a \fallingdotseq 0$ のとき，与方程式は，

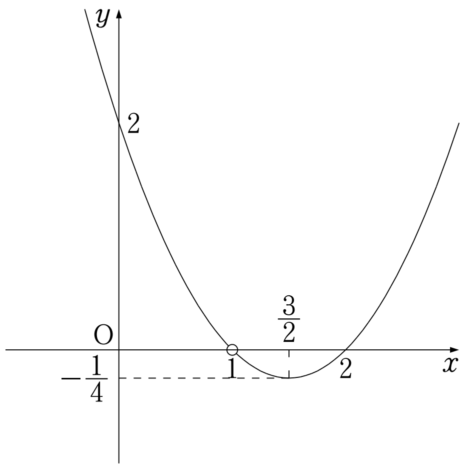
$(x-1)(x-2)=\dfrac{1}{a}$ と変形できる。

これより，

$$\begin{cases} y=(x-1)(x-2) & \cdots① \\ y=\dfrac{1}{a} & \cdots② \end{cases}$$

として，放物線①と直線 $y=\dfrac{1}{a}$ との共有点の個数を調べる。

①のグラフは次のようになる。



図より，

（i）　$\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{4}$

すなわち，$-4<a<0$ のとき，0 個

（ii）　$\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{4}$

すなわち，$a=-4$ のとき，1 個

（iii）　$\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{4}$

すなわち，$a<-4$，$0<a$ のとき，2 個

以上，［I］，［II］より，

$a<-4$，$0<a$ のとき，2 個

$a=-4$ のとき，1 個

$-4<a \leqq 0$ のとき，0 個

解説　放物線 $y=(x-1)(x-2)$ は描きやすいので，定数 $\dfrac{1}{a}$ を分離するのは自然である。$a=0$ のときの扱いもきちんとしている。(iii)では，$\dfrac{1}{a}=0$ となることがないから x 軸上が除かれていることと元の方程式との関連に触れなくてよいか。

参考　M.T. 君のレポートより

条件より，$a=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

ここで，

$$\begin{cases} y=a & \cdots① \\ y=\dfrac{1}{x^2-3x+2} & \cdots② \end{cases}$$

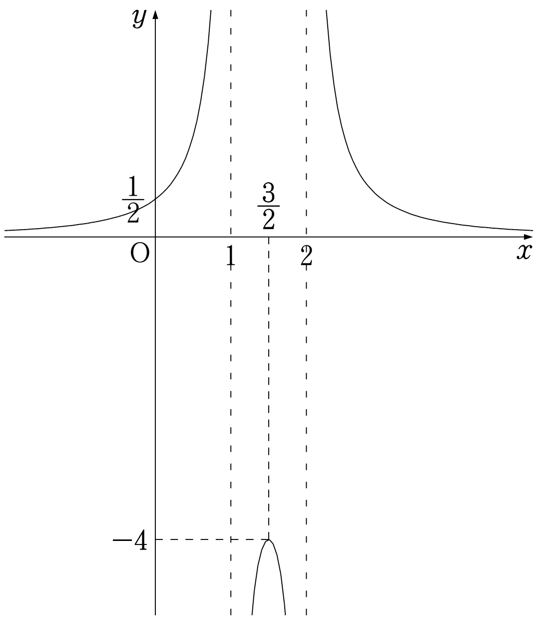
とおく。

②より，$y'=\dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$

これより，増減表は次の通り。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗		↗	-4 極大	↘		↘

よって，②のグラフは次のようになる。



図より，

$-4<a \leqq 0$ のとき，0 個

$a=-4$ のとき，1 個

$a<-4$，$0<a$ のとき，2 個

解説　定数 a を分離して，グラフの共有点の問題に持ち込んだのだが，数 III に入ったばかりの段階で分数関数の微分はまだ学習していない。定義に従って微分したという。$x=1$ の前後，$x=2$ の前後，$|x|$ が十分大きいときのグラフの状態は細かくは調べていないがよい感覚である。